تئوری اعداد

۲۵۰ مسألهٔ حساب

نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی

چاپ سوم

ترجمهٔ

پرویز شهریاری

تئوری اعداد

۲۵۰ مسألهٔ حساب

نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

واتسلاو سرپینسکی

W. Sierpinski

تئوری اعداد

250 problèmes
de théorie élémentaire
des nombres

چاپ اول: آبان‌ماه ۱۳۴۹ هـ. ش. ـ تهران
چاپ دوم: شهریورماه ۱۳۶۹ هـ. ش. ـ تهران
چاپ سوم: تیرماه ۱۳۷۷ هـ. ش. ـ تهران
چاپ و صحافی: سازمان چاپ و انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی
تعداد: ۵۰۰۰ نسخه

شابک ۷-۰۰۷-۴۸۷-۹۶۴ ISBN 964-487-007-7

واتسلاو سرپینسکی

فهرست

مقدمه مترجم فارسی	درصفحهٔ ۷
واتسلاو سرپینسکی ریاضی‌دان برجستهٔ لهستانی	درصفحهٔ ۹
مقدمهٔ مترجم روسی	درصفحهٔ ۲۲

عنوان	صورت مسئله	حل
۱. قابلیت تقسیم	۲۶	۶۶
۲. عددهائی‌که نسبت بهم اولند	۳۲	۹۳
۳. تصاعدحسابی	۳۳	۱۰۲
۴. عددهای اول و مرکب	۳۶	۱۱۹
۵. معادلات دیوفانتی	۴۶	۱۶۹
۶. مسائل مختلف	۵۶	۲۲۱

یادداشتهای مترجم	درصفحهٔ ۲۶۵
اثبات پوستولات برتران (قضیهٔ چبیشف)	درصفحهٔ ۲۸۴
قضیهٔ شرنک	درصفحهٔ ۲۹۷

نظریهٔاعداد از دلچسب‌ترین مباحث‌ریاضی‌است. ازیکطرف هرکسی می‌تواند نیروی استدلال و تفکر خودرا درمیدان نبرد با قوانین‌شناخته و ناشناختهٔ‌آن‌بیازماید وازطرف دیگرتنوع استدلالها و بی‌ارتباطی‌ظاهری‌که درمورد قوانین وروابط مربوط به‌آن به‌چشم می‌خورد ، زیبائی‌خاص و بی‌نظیری به‌آن می‌دهدکه جذبهٔ‌آن هر علاقمندی را روزها وماهها بخودمشغول می‌دارد .

وقتی خواننده صورت‌مسئله‌ای از این‌کتاب را می‌خواند ، اگر قبلاً آنراندیده باشد ، درابتدای‌کار خود را در مقابل معمائی می‌بیند و بنظرش می‌رسدکه تنهایك معجزه می‌تواند مسیر استدلال اورا معین‌کند . ولی‌وقتی به‌آن مشغول می‌شود واحتمالا ازقسمت مربوط به حل آن کمك می‌گیرد با شادی فوق‌العاده‌ای احساس می‌کندکه خودبه‌نقش معجزه‌ساز درآمده‌است و به‌محیط اسرارآمیز و تاریك‌مسئله نورامیدی داده‌است و توانسته‌است بتدریج به کلید حل‌آن نزدیك‌شود .

گاهی هم دهانش از تعجب باز می‌ماند که چگونه خود نتوانسته است ارتباطی به‌این سادگی واستدلالی به‌این‌روشنی‌را پیدا کند و راه‌حل مسئله را بگشاید .

خواننده در مقدمه و مؤخره و حواشی کتاب می‌بیند که این وضع مخصوص اونیست و بزرگترین ریاضی دانها هم درچنین احساسهائی با اوشریك بوده‌اند وهمین تشابه موقعیت ، اورا قانع می‌کند که اگر بخواهد وحوصلهٔکار وتفکر را داشته‌باشد ، می‌تواند به جمع محققین مربوط به‌نظریهٔ اعداد بپیوندد .

اگر ترجمه ونشر این کتاب تنهاهمین اثررا برروی خوانندهٔ مستعد و علاقمند بگذارد ، اجری بزرگ برای مترجم فارسی آن خواهد بود .

پرویزشهریاری

واتسلاوسرپینسکی

ریاضی‌دان برجستهٔ لهستانی

درچهاردهم‌مارس۱۸۸۲در شهرورشو، درخانوادهٔ **کنستانتین‌سرپینسکی** طبیب، پسری بدنیاآمدکه دونام به‌اودادند : **واتسلاوفرانتسیك** . همین پسر بچه بودکه می‌بایست درآینده یکی ازبزرگترین ریاضی‌دانهای لهستان‌بشود.

واتسلاوسرپینسکی تحصیلات خود را در ورشوگذراند ودرهمانجا دورهٔ دبیرستان ودانشگاه خود را تمام‌کرد . استعداد غیرعادی سرپینسکی خیلی زود بروزکرد ، ولی‌علاقهٔ او به ریاضیات در سالهای آخر دبیرستان و تحت تأثیر دونفر از هم‌کلاسیهایش ، که به بعضی از قسمتهای ریاضیات عالی آشنا بودند ، ومعلم‌برجستهٔخود : **ولودزیمژ بلودارسکی** ، آشکار شد. این معلم‌به استعداد ریاضی سرپینسکی بی اندازه معتقد بود . سرپینسکی معلمین مشهور دیگری هم دردبیرستان داشت . مثلامعلم‌زبان فرانسهٔ او **ك . آپل** بودکه‌بعدها استاد دانشگاه ورشو شد .

بین همسالان سرپینسکی در دبیرستان ، افراد با استعداد کم نبودند . ازکلاسی‌که سرپینسکی درآن تحصیل می‌کرد ، تعداد قابل توجهی دانشمند و بزرگان فرهنگ بیرون‌آمد ،که میان‌آنها می‌توان ازمنجم مشهور **تاده‌اوش باناخه‌ویچ** نام برد .

سرپینسکی از همان سالهائی که در دبیرستان بود به‌کارهای اجتماعی علاقه پیدا کرد . او همراه با چند نفر از دوستانش یك مدرسهٔ مخفی برای بچه‌های کارگران اطراف خود سازمان داد . این مدرسهٔ مخفی توانست طی سالها ، شاگردان خود را برای امتحان چهارکلاس دبیرستان آماده‌کند .

سرپینسکی درسال ۱۹۰۰ به دانشکدهٔ فیزیك ـ ریاضی دانشگاه ورشو

وارد شد ، این‌دانشگاه در آن زمان هنوز مؤسسهٔ آموزشی جوانی بود و بیش ازسی‌سال‌از تأسیس آن نمی‌گذشت‌وتدریس در آن به‌زبان روسی‌انجام‌می‌گرفت[۱] .

بایدمتذکرشد، لهستانیهائیکه می‌توانستند دردانشگاههای قدیمی‌لهستان (دانشگاه **کراکوو**، دانشگاه **لووو**)تحصیل‌کنند، بارغبت به‌این‌دانشگاه جدید هم‌روآوردند. مشکلاتی‌راکه‌درسالهای نخستین تأسیس (بخاطرنداشتن‌سنتهای آموزشی ، کمبودمعلمین علوم وغیره) ، گریبانگیر دانشگاه بود ، خیلی‌زود از میان برداشتند .

وجودریاضی‌دانهای‌فعال‌دراین‌دانشگاه(درمرحلهٔ اول **م.آ.آندروسکی، ن.ن. آلکسه‌یف ، ن.یا.سونین** وسپس **و.آ.آنیسیموو ، ن.ن.زینین و گ. ف. وارانوی**) ازلحاظ تعلیم ریاضی ، آنرا به سطح دانشگاههای پترزبورگ، مسکو ، قازان وخارکوف رسانید .

گئورگی فدوسه ایه‌ویچ وارانوی (۱۸۶۸ - ۱۹۰۸) استاد ریاضی وعضو وابستهٔ فرهنگستان علوم روسیه ، که خود پروردهٔ دانشگاه پترزبورگ بود ، بیش از همه در سرپینسکی اثرگذاشت . فعالیت وارانوی در دانشگاه ورشو ازسال ۱۸۹۴ شروع شد وتا زمان مرگ بیموقع او (با بعضی وقفه‌های کوتاه) ادامه داشت . وارانوی ، دانشمندی از تراز اول بود وبرآثار اومهر نبوغ نقش‌بسته است . به‌اتفاق **هرمان مینکوسکی** ، هندسهٔ اعداد را بوجود آورد . در نظریهٔ تحلیلی اعداد و هم در نظریهٔ اعداد جبری به نتایج مهم و عمیقی رسید .

سرپینسکی چنددوره ازکنفرانسهای وارانوی راگوش‌کرد وبه اولین‌کار علمی خود دربارهٔ نظریهٔ تحلیلی‌اعداد ، تحت تأثیر افکار وروشهای‌وارانوی، پرداخت (او روی متنی‌که و ارانوی برای مسابقات دانشجوئی نوشته بود، کارکرد) . معرفی مفصل وارانوی ، در بارهٔ این کار ، در جلد ششم «اخبار دانشگاهی ورشو» درسال ۱۹۰۴چاپ شده است . وارانوی برای سرپینسکی پیشنهاد مدال طلاکرد وخواست‌که او در دانشگاه بماند تا برای مقام‌استادی

---

۱) این دانشگاه برمبنای مدرسهٔ بزرگی بوجود آمد که در سالهای ۱۸۶۲ - ۱۸۶۹ درورشو وجود داشت . ازابتدای قرن‌نوزدهم تا سال۱۸۳۲ درورشو ، دانشگاه لهستانی وجود

آماده شود . سرپینسکی همیشه نام وارانوی را باگرمی بخاطر می‌آورد[1] .

دیپلم سرپینسکی (دربارهٔ تمام‌کردن دانشگاه) نگهداری شده است . ما دراینجا متن‌این سند جالب را می‌آوریم ، زیرا این سند را **پ آ. زیلووی** رئیس دانشگاه ورشو و **ن. ن. زینین** رئیس دانشکدهٔ فیزیك ـ ریاضی امضا کرده‌اند (زینین پسرزینین شیمی‌دان مشهور روس است) .

دیپلم

شورای دانشگاه سلطنتی ورشو اعلام می‌داردکه واتسلاو ـ فرانتسیك کنستانتینویچ سرپینسکی در ابتدای سال تحصیلی ۱۹۰۰ ـ ۱۹۰۱ به دانشجویان‌دانشگاه ورشوپیوست ودرجریان سالهای‌تحصیلی ۱۹۰۰-۱۹۰۱، ۱۹۰۱-۲، ۱۹۰۲-۳ و۱۹۰۳-۴ دورهٔ کامل‌علومی راکه در چهار دورهٔرشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ فیزیك ـ ریاضی دانشگاه او تدریس شد ، تمام‌کرد ، و درآزمایش نهائی وضع اوچنین است : در هندسه ، آنالیز ، نظریهٔ اعداد ، نظریهٔ احتمالات ، مکانیك ، نجوم، مساحی ، فیزیك‌ریاضی ، فیزیك تجربی ، جغرافیای فیزیکی وشیمی ـ عالی (۵) ؛ درزبان روسی و تألیف ـ خوب (۴) . جوابهای کتبی او ۵ ارزیابی شده است (عالی) .

از تألیف اوزیر عنوان «**Summa**» نام می‌بریم که‌درزمینهٔ « رشتهٔ $\sum_{n>a}^{n<b} \tau(n)f(n)$ و مجموع آنست ، دراین‌رشته $\tau(n)$ عبارت از تعداد نبدیل n به مجموع مربعات دوعدد صحیح است» ودرشورای ۲۷ مه ۱۹۰۴ مدال طلابه‌آن داده شد . به این‌مناسبت ، طبق‌تبصرهٔ مادهٔ ۹۶ آئیننامهٔدانشگاه ، سرپینسکی به نامزدی درجهٔ علمی‌دانشکدهٔ فیزیك ـ ریاضی قبول شد وطبق‌مادهٔ ۴۷ آئیننامه دانشگاه ، با رأی شورای دانشگاه درتاریخ ۱۹ ژوئن ۱۹۰۴ ، به این درجه نائل‌شد . درنتیجه آقای سرپینسکی تمام حقوق و امتیازات درجهٔ نامزدی را ،

---

۱)وارانوی‌در ۲۰ نوامبر ۱۹۰۸ مرد. سه‌روز بعد، سرپینسکی‌متن‌سخنرانی خودراکه قراربود انجام دهد ، تغییرداد ودربارهٔ وارانوی حرف‌زد .

طبق قوانین امپراطوری روسیه ، بدست آورد . با تأیید این مطالب از طرف شورای دانشگاه امپراطوری ورشو، این دیپلم که به مهر دانشگاه ممهور است ، به او داده می‌شود .

ورشو . اول آوریل سال ۱۹۰۵

سرپینسکی بعداز اتمام دانشگاه ، در دو دبیرستان ورشو به تدریس ریاضی پرداخت . فعالیت آموزشی او نتوانست ادامه پیداکند ، زیرا در سال ۱۹۰۵ ، بعد از اعتصاب دانش آموزان جوان (که سرپینسکی به آنها پیوسته بود) ، مجبور به ترك ورشو شد . سرپینسکی به رشتهٔ فلسفهٔ دانشگاه کراکوو داخل شد ، که در آنجا دو ریاضی‌دان مشهور لهستانی کار می‌کردند : **ستانیسلاو زارمبا** و **کازیمیرژوراوسکی** ؛ اولی متخصص در نظریهٔ معادلات دیفرانسیلی بود و دومی در رشتهٔ هندسه کار می‌کرد . سرپینسکی در سال ۱۹۰۶ امتحان ریاضی ، نجوم و فلسفه را ، که برای درجه دکترا اجباری بود ، گذراند و به مناسبت تألیف علمی «دربارهٔ مجموع رشتهٔ « $\sum_{m^2+n^2\leqslant x} f(m^2+n^2)$ » به درجهٔ علمی

دکترای فلسفه نائل شد . سرپینسکی بعداز مراجعت به ورشو به تدریس ریاضی درمدارس متوسطه ، سمینار معلمین و دردوره‌هائی که نقش دانشگاه لهستان را داشتند (دانشگاه ورشو در سالهای ۱۹۰۵–۱۹۰۸ بسته شد) پرداخت ، ولی قسمت عمدهٔ وقت خود را صرف تحقیقات علمی می‌کرد . درسال ۱۹۰۶ اولین اثر او باعنوان «دربارهٔ یك مسئله از نظریهٔ توابع مجانبی» چاپ شد (به زبان لهستانی) . چه از لحاظ طرح مسئله وچه از لحاظ روش کار ، این اثر مربوط به اثری از **وارانوی** (بهمین نام) می‌شود که در سال ۱۹۰۳ در مجلهٔ **کرل** به زبان فرانسه چاپ شده بود . یادآوری این مطلب جالب است که همین نوشتهٔ وارانوی، یکی از محرکهای آکادمیسین **ای. م. وینوگرادوف** برای تحقیقات مشهور اوست .

در تألیفی که نام بردیم ، سرپینسکی رابطه‌ای بدست می‌آورد که به کمك آن می‌توان تعداد نقاط $A(n)$ با مختصات صحیح x و y را درداخل دایرهٔ

$x^2+y^2\leqslant n$ بتقریب بدست‌آورد . رابطهٔ سرپینسکی[۱] به اینصورت است .

$$A(n)=\pi n+o(\sqrt{n})$$

در اثردیگری‌که‌درسال۱۹۰۹ چاپ شد ، سرپینسکی ، رابطهٔمجانبی جدیـدی طرح می‌کند کـه تعداد نقاط با مختصات صحیح را در داخل کرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant n$ بدست می‌دهد .

هر دو تألیف مذکور و بسیاری از تحقیقات دیگر سرپینسکی برروش مکتب پترزبورگی قرار داردکه خطوط مشخصهٔ آن عبارتست از طرح مسائل مشخص وواضح وحرکت بسمت حل «آلگوریتمی» مسئله ، بصورت رابطه‌ای که برای محاسبه ساده باشد .

درسال ۱۹۰۷ یکی ازآثار خود را ، درزمینهٔ آنالیز ، بزبان‌فرانسه منتشرکرد . از ۱۹۰۸ ببعد ، تعداد تألیفات سرپینسکی ، که محتوی آنها بسیار متنوع است ، به زبانهای لهستانی و فرانسوی ، بسرعت زیاد می‌شود . در۱۹۴۸ ، درفهرست آثار سرپینسکی ، بیش از ۵۱۲ رساله ، ۱۵ بررسی خاص و کتابهای درسی نام برده شده است . ودیعهٔ بزرگ سرپینسکی در علم مورد تقدیر جدی ریاضی‌دانهای‌کشور او وهمهٔ جهان قرار گرفت .

کنگرهٔ ششم ریاضی‌دانهای لهستان‌درسال ۱۹۴۸ مصادف با چهلمین‌سال فعالیت دانشگاهی سرپینسکی بود . در این مجمع اظهارات گرمی به عنوان سرپینسکی بیان شد . ازریاضی‌دانهای اتحاد شـوروی **آ. ن. کولموگوروف** گفت : «از طرف آکادمی علوم اتحاد جماهیـر شوروی سوسیالیستی و مجمع ریاضی‌دانهای مسکو ، به پروفسور سرپینسکی ، بخاطر چهلمین سال فعالیت علمی او ، درود می‌فرستم .

ریاضی‌دانهای شوروی به‌کارهای علمی پروفسور سرپینسکی وکوششهای او به‌عنوان بنیان‌گذار مکتب ریاضی‌لهستان ، که‌جای خود را دربین‌مکتبهای علمی‌جهان‌بازکرده است ، ارزش فراوان قائل‌اند .

---

۱) $f(t)=O(g(t))$ به این‌معنی است‌که برای مقادیر به اندازهٔ‌کافی بزرگ t ، نامساوی $|f(t)|<kg(t)$ برقرار است (k مقدار ثابتـی است) . این قضیهٔ سرپینسکی درسال۱۹۱۳ بوسیلهٔ ا. **لاندو** ریاضی‌دان مشهورآلمانی دوباره ثابت‌شد .

اجازه بدهید ، واتسلاوکنستانتینویچ ، کـه سالهای درازی را بـرای فعالیتهای پرثمرشما آرزوکنیم» .

کثرت‌آثار سرپینسکی (که تعداد آنها عددی افسانه‌ای است) ، اجازه نمی‌دهد همهٔ آثار او را تحلیل‌کنیم و ناچار خلاقیت علمی او را ، در خطوط کلی‌خود ، مورد مطالعه قرارمی‌دهیم . تنها روی چهار اثرسرپینسکی ،که‌در ۱۹۰۸ چاپ شد ، مکث می‌کنیم .

این‌آثار زودرس سرپینسکی ، مثل اولین‌کارچاپی او ، معرف استعداد فوق‌العادهٔ مؤلف درزمینهٔ ریاضی وقابلیت علمی بلند پایهٔ اوست .

در اثربزرگ اودربارهٔ مجموع رشتهٔ $\Sigma\tau(n)f(n)\ldots$ ، ضمن‌نتایج مختلفی‌که بدست‌آمده است ، به‌تخمین مجموعهائی به صورت :

$$\sum_{n=1}^{x} \tau(n^2) \ , \ \sum_{n=1}^{x} \tau^2(n) \ , \ \sum_{n=1}^{x} \tau_8(n)$$

برمی‌خوریم‌که‌درآنها $\tau(n)$ و $\tau_8(n)$ عبارتنداز‌تعدادتجزیهٔ n به۲و۸مربع.

سرپینسکی دراثر دیگر خود « دربارهٔ حالتی از تبصرهٔ نادرست ضرب احتمالی»ثابت می‌کندکه احتمال اینکه دوعددطبیعی ،که ازn بزرگتر نباشند، نسبت بهم اول‌باشند ، برابر است با:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\left[\frac{n}{k}\right]^2$$

که درآن μ تابع **موبیوس** وکروشه نمایندهٔ عدد صحیح است .

سرپینسکی نتیجهٔ‌کلاسیك جدیدی در اثر خودش بنام « دربارهٔ تبدیل اعداد صحیح به تفاضل دو مربع» بدست‌آورد . دراینجا او ثابت‌کردکه تعداد تبدیلهای مختلف عدد n به صورت تفاضل دو مربع برابر است با دو برابر اختلاف بین تعداد مقسوم‌علیه‌های زوج وتعداد مقسوم‌علیه‌های فرد عدد n .

در سالهائی‌که سرپینسکی در دانشکده درس می‌خواند ، هنوز نظریهٔ مجموعه‌ها جزو مواد درسی قرار نگرفته بود . بسیاری از ریاضی‌دانها یا دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌های ژرژکانتور (۱۸۴۵ ـ ۱۹۱۸) چیزی نمی‌دانستند ویا تنها تصور مبهمی‌ازآن داشتند درسال ۱۹۰۷، سرپینسکی دربارهٔ‌کشفی که دربارهٔ مورد جالب توجهی از نظریهٔ مجموعه‌ها کـرده بود ، نامه‌ای به

گوتینگن نوشت . دراین‌زمان یکی از موضوعات‌مهمی‌که سرپینسکی را بخود مشغول کرده بود ، نظریهٔ مجموعه‌ها و مطالب مربوط به‌آن در توپولوژی (مکان شناسی) ، نظریهٔ توابع با متغیرحقیقی ، منطق ریاضی وسایر رشته‌های ریاضیات بود .

اولین اثر سرپینسکی دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها درسال ۱۹۰۸ باعنوان «دربارهٔ یك قضیهٔ کانتور»چاپ شد ؛ سرپینسکی در این اثر ، مستقل‌ازکانتور، قضیه‌ای را(که البته امروز برای هر دانش‌آموزی روشن است) در این مورد ثابت کرد که استقرار نقاط برصفحه را می‌توان بوسیلهٔ یك عدد حقیقی معین کرد ؛ ازهمین قضیه بسادگی نتیجه می‌شودکه مجموعهٔ نقاط یك خط راست و یك صفحه ، وبطورکلی فضای چندبعدی ، هم‌ارزند .

سرپینسکی، بعدها نتایج‌عمیق‌ومهمی، چه‌درزمینهٔ نظریهٔ انتزاعی‌مجموعه‌ها وچه در زمینهٔ تعبیرتوپولوژیك آن ، وبخصوص‌درمورد ارتباط نظریهٔ‌مجموعه‌ها با منطق ریاضی ، بدست‌آورد . دراین مورد در نظر اول می‌بایستی به‌فرضیهٔ مشهورکانتور (که به اصل‌موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها معروف شده است) ونتایج هندسی‌آن‌توجه‌می‌شد(ابتدا بوسیلهٔ سرپینسکی وسپس عدهٔ‌زیادی از دانشمندان دیگر)

سرپینسکی بیش ازده اثر بزرگ دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ، نظریهٔ‌توابع وتوپولوژی نوشت،که ازآنجمله‌می‌توان از «Leçon sur les nombre transfinis» (درسی از اعداد ترانسفینی) که در سال ۱۹۵۰ در پاریس چاپ شد و «Cardinal and ordinal numbers» (اعداد اصلی و ترتیبی) که در سال ۱۹۵۸ در ورشو چاپ شد ، نام برد .

شروع فعالیت سرپینسکی درریاضیات ، موفقیت‌آمیز بود وبسرعت‌کسب شهرت‌کرد ، سرپینسکی از پائیز ۱۹۰۸ بدعوت **ای. پوژین** رئیس دانشگاه **لووو** و متخصص درنظریهٔ توابع تحلیلی ، در این‌دانشگاه مشغول بکار شد . او درسالهای تحصیلی بعد ، دراین دانشگاه، بتدریس « نظریهٔ مجموعه‌ها » پرداخت، وبقول **گه‌ویدو-فتر** مورخ ریاضی اهل‌چك ، نخستین دانشگاهی در جهان بودکه نظریهٔ مجموعه‌ها درآن تدریس می‌شد . دانشجویان علاقهٔ‌زیادی به این درس نشان می‌دادند . بعضی از این دانشجویان ، بعدها همین‌رشته‌را

تعقیب کردند و به محققین برجسته‌ای معروف شدند . بین اولین شاگردان سرپینسکی ، یکی **ا. نیکودیم** بود ، که حالا استادیکی از دانشگاههای امریکاست ؛ دیگری **س. روژه‌ویچ** ، که بعدها استاد دانشگاه لهوو و رئیس تجارت خارجی شد ودرسال ۱۹۴۱ همراه چند استاد دیگردانشگاه لهوو ، بدست غاصبین فاشیست آلمانی کشته شد .

درسال ۱۹۱۰ ، دانشگاه لهوو ، عنوان استادی را به سرپینسکی داد وپس ازسالی ، آکادمی علوم کراکوو ، بخاطر کارهائی که درسالهای ۱۹۰۹–۱۹۱۰ بزبان لهستانی انجام‌داده بود ، به‌او پاداش‌داد . فعالیتهای سرپینسکی، توجه ریاضی‌دانهای جوان وبا استعداد را بخود جلب‌کرد . درسال ۱۹۱۳، **س. مازورکه‌ویچ** که‌دورهٔ دکترا رامی‌گذراند و **ز. یانیشوسکی** که دکترای‌خود را از دانشگاه پاریس ، بمناسبت کارش در زمینهٔ توپولوژی ، گرفته بود ، به لهوو وارد شدند . اجتماع شاگردان و همکاران سرپینسکی ، که علاقمند به نظریهٔ مجموعه‌ها بودند ، بطور نمایانی توسعه پیداکرد ، و در لهوو (شهری که درآنزمان درقلمرو اطریش–هنگری بود)، مکتب جدید ریاضی‌لهستانی بوجود آمد .

تقریباً درهمین‌زمان در روسیه‌هم ، مکتب‌ریاضی‌جدیدی بوجودمی‌آمد: مکتب مسکوی نظریهٔ توابع با متغیرهای حقیقی . فکر مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها در ادبیات ریاضی روسیه ، از اوایل قرن بیستم بچشم می‌خورد . **ب. ک. ملودزوسکی** در دانشگاه مسکو اولین برنامهٔ مربوط به توابع با متغیرهای حقیقی را بعهده داشت «اعداد متعالی» **ای. ای. ژه‌گالکین** درسال ۱۹۰۷ چاپ شد وبالاخره درسال ۱۹۱۱ اثرمشهور **د. ف. یگوروف** «دربارهٔ دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر» منتشرشد .

فعالیتهای **ن. ن. لوزین** (۱۸۸۳–۱۹۵۰) ، شاگرد د.ف.یگوروف در دانشگاه مسکو ، درزمینهٔ نظریهٔ توابع دربوجود آمدن مکتب جدید ریاضی، اهمیت قطعی داشت . آثار اولیهٔ لوزین از **گوتینگن** و **پاریس** فرستاده شد ؛ لوزین درفاصلهٔ سالهای ۱۹۱۰–۱۹۱۴ در این دوشهر درکلاسهای ریاضی–دانهای بزرگ شرکت می‌کرد ودرهمانجا آثارجالبی بوجودآورد .

لوزین درسال ۱۹۱۵ ، رسالهٔ دکتری خود را بنام «انتگرال‌ورشته‌های

مثلثاتی» نوشت که در تکامل بعدی نظریهٔ توابع اثر فوق‌العاده‌ای داشت. از همین زمان است که باید لوزین را در رأس مکتب ریاضی مسکو به‌حساب آورد، که ناشر بررسیهای مشهور خود لوزین وشاگردان او : **پ. س. الکساندروف، د. ا. منشوو، م. یا. سوسلین و آ. یا. خینچین**، بود .

شکفتگی اصلی مکتب لوزین مربوط به دوران حکومت شوروی‌می‌شود که‌همراه با آثارلوزین‌ونخستین‌شاگردان او ، آثاری‌هم از **آ.ن. کالماگوروف، م. آ. لاورنتیف ، پ. س. نوویکوف ، پ. س. اوریسوف ، ل. و. کلدیش** و سایر محققین منتشرشد .

تأثیر مکتب مسکوی درپیشرفت ریاضیات‌کشور شوروی خیلی محسوس است ، بطوریکه افکار مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها در آنالیز تابعی ، نظریهٔ احتمالات ، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل وسایررشته‌های ریاضی نفوذکرد .

مکتب مسکوی درتکامل‌ریاضیات خارج ازشوروی هم اثرفراوان داشت، «بخصوص اثرجدی در ریاضیات لهستانی داشت ، که در آنجا مکتب نظریهٔ توابع بطورجدی بوجودآمده بود (سرپینسکی ، شتین‌گائوز ، مازورکیویچ، زیگموند ودیگران)؛ علاوه برآن تأثیر این‌مکتب در دانشمندان فرانسوی ، انگلیسی ، آلمانی وژاپونی هم‌کم نیست»[1]

فعالیتهای علمی سرپینسکی ، ازهمان آغازکار ، درلهستان شهرت‌پیدا کرد . درسال ۱۹۱۳ ، آکادمی علوم‌کراکوو بخاطر «شرح نظریهٔ‌مجموعه‌ها» و در سال ۱۹۱۷ بخاطر «نظریهٔ اعداد» ، جوایزی به او اعطاکرد . هر دو کتاب ، اولی درسال ۱۹۱۲ ودومی درسال ۱۹۱۴ ، دروارشو بزبان لهستانی چاپ شد .

در ابتدای جنگ‌اول جهانی ، سرپینسکی مجبورشد به **ویاتکا** عزیمت کند (درآن زمان شهر لهوو جزواطریش ـ هنگری محسوب می‌شد). ولی سرپینسکی‌دراینجاخیلی نماند، زیرا **د. ف. یگورو وب.ك. مه‌لودزه‌یوسکی**، بعد از تلاش بسیار ، موفق شدند اجازهٔ اقامت او را در مسکو بگیرند .

سرپینسکی‌درسال۱۹۱۵ به‌مسکورفت ودرجریان قریب سه‌سال‌فعالیتهای علمی خود را درآنجا دنبال‌کردوبرخوردهای جالب ومفیدی با ریاضی‌دانهای

---

۱) آ. پ. یوشکویچ ، درکتاب «تاریخ علوم تجربی در روسیه» .

روسی داشت . امکان همکاری با سرپینسکی ، بسیاری از ریاضی‌دانهای مسکو را خوشحال کرده بود . مثلا **پ. س. آلکساندروف** (که در آنموقع شاگرد لوزین بود) با افتخار از این خاطره یاد می‌کند ، که در پائیز ۱۹۱۵ توانست دربارهٔ اولین کار علمی خود در حضور سرپینسکی سخنرانی ایراد کند. سرپینسکی هم با احترام و تشکر از دقت و توجهی که به گورروو ، مه‌لودزه‌یوسکی و دیگر ریاضی‌دانهای مسکوی نسبت به او داشتند ، یاد می‌کند . ولی بیش از همه دوستی نزدیك او با لوزین ، برای سرپینسکی ، اهمیت خاص دارد[۱] . این دوستی براساس علاقه‌های مشترك علمی بنیان گذاشته شد و بخاطر تحقیقات مشترك آنها محکم‌شد ومنبع الهامی برای هردوی آنها ، درطول چند ده‌سال (تا زمان مرگ لوزین) بود .

چه در ویاتکا وچه درمسکو، هرگز فکر تأسیس یك دانشگاه لهستانی در ورشو . سرپینسکی را رها نکرد . سرپینسکی اولین جلد «آنالیز ریاضی» خود را در دوقسمت ، درسالهای ۱۹۱۶-۱۹۱۷ ، در مسکو بزبان لهستانی چاپ کرد . این کتاب درسال ۱۹۲۳ درورشو تجدید چاپ شد ودر طول سالهای زیادی کتاب درسی دانشجویان لهستانی بود . در سالهای ۱۹۱۵-۱۹۱۸ ، سرپینسکی ۳۶ اثر خود را چاپ کرد (که چهارتای آنها با لوزین مشترکاً تهیه شده بود)، یعنی بهمان اندازه که درچهار سال قبل از آن منتشر کرده بود

در بهار ۱۹۱۷ ، سرپینسکی ازطریق روزنامهٔ لهستانی که درمسکو نشر می‌شد ، بطورغیر منتظره مطلع شدکه آکادمی علوم کراکوو ، او را به‌عضویت خود انتخاب کرده است . این خبراورا خیلی خوشحال کرد . بعد ازانقلاب اکتبر ، سرپینسکی به لهوو بازگشت و درآنجا در دانشگاه مشغول شد . در پائیز ۱۹۱۸ ،کرسی خود را در دانشگاه ورشو ،که بتازگی تأسیس شده‌بود، بدست آورد . سرپینسکی در ورشو ، دوستان خود پروفسور **ر. یانیشوسکی** و **س. مازورکه‌ویچ** را پیدا کردکه بلافاصله به‌کمك آنها به طرح برنامهٔ تکامل ریاضیات درلهستان پرداخت. درسال ۱۹۱۹ ، این سه‌ریاضی‌دان تصمیم گرفتند، بـرای اولین بار در دنیا ، مجلهٔ ریاضیات اختصاصـی Fudamenta»

۱) عکسی باقی‌مانده است ،که درآن به گورروو ، لوزین و سرپینسکی را نشان می‌دهد .

«Mathematicae» را بوجود آوردند که در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ، مکان شناسی (توپولوژی) ، نظریهٔ توابع با متغیرهای حقیقی و منطق ریاضی بحث کند . بسیاری ازریاضی‌دانهای‌مشهور (ومنجمله آ. **لهبگ**) اعتقادی به‌موفقیت این مجله نداشتند ، آنها می‌گفتند ، مجله‌ای که به سایر رشته‌های ریاضی نمی‌پردازد ، نمی‌تواند به‌حیات خود ادامه دهد . اولین شمارهٔ این مجله ، درسال ۱۹۲۰ ، چند ماهی بعد ازمرگ **زیانیشوسکی** (یکی‌از مؤسسهای‌آن) منتشرشد . کاری راکه سرپینسکی شروع کرده بود ، باهمکاری **مازورکه‌ویچ** تا۱۹۴۵(سال‌مرگ مازورکه‌ویچ) ادامه داشت ، سپس‌وظیفهٔ سنگین‌سردبیری را با **ک. کوراتوسکی** بعهده گرفت . در سالهای اخیر ، سرپینسکی سردبیر افتخاری و کوراتوسکی سردبیر مجله می‌باشد . این‌مجله ، نه‌تنها درلهستان بلکه درهمهٔ‌کشورهائی‌که ازآن‌استفاده‌می‌کنند ، نقش بسیار مؤثری درپیشرفت ریاضیات داشته است . وقتی‌که درسال ۱۹۳۵ ، بیست وپنجمین شمارهٔ مجله منتشرشد ، یکی ازریاضی‌دانهای‌امریکایی‌گفت‌که تاریخ « F.M » درعین‌حال تاریخ نظریهٔ معاصر توابع با متغیرهای حقیقی است . در ۱۹۶۲ ، وقتی که پنجاهمین شمارهٔ مجله منتشر شد ، **پ. س. آلکساندروف** اظهار داشت که سالروزاین‌مجله ، جشن همهٔ ریاضی‌دانهای‌جهان‌است . همانطورکه‌سرپینسکی متذکر می‌شود ، در۵۰ شمارهٔ این مجله ، بیش از ۱۵۰۰ نوشته از ۴۲۰ مؤلف مختلف چاپ شده است ، و از آنجمله قریب ۳۰۰ نفرآنها خارجی بوده‌اند ،که‌دربین‌آنها بزرگترین ریاضی‌دانهای‌معاصر دیده می‌شود . دراین مورد باید سهم اساسی‌را به‌ریاضی‌دانهای لهستانی، وبخصوص‌خود سرپینسکی داد که از۱۵۰۰ اثر ، ۲۶۲ تای‌آنها متعلق به‌اوست .

درسال ۱۹۲۱ ، سرپینسکی به‌عضویت‌آکادمی لهستان انتخاب شد. در بسیاری ازکشورهای جهان ، فعالیت‌خلاق واستثنائی اومورد توجه جدی‌قرار گرفت . سرپینسکی دعوتهای متعددی از دانشگاههای خارجی دریافت‌کرد . اوسخنرانیهائی در **ستراسبورگ** ، **سوربن** ، **یاسی** (در رومانی) ، **بروکسل** ، **ژنو** ، **بازل** ، **پراگ** ، **بوداپست** ، **رم** و دیگر شهرهاانجام‌داد. نام‌سرپینسکی بسرعت جنبهٔ عام پیدا کرد . در کتابهای ریاضی اصطلاحات «منحنی عمومی سرپینسکی» ، «منحنی مثلثی سرپینسکی» ، «پیوستگی سرپینسکی» و غیره

معمول شد .

سرپینسکی درسالهای جنگ دوم جهانی، کارهای علمی‌خود را تعطیل نکرد وحتی دردانشگاه مخفی ورشو تدریس می‌کرد . درپائیز ۱۹۴۴، وقتی که ارتش آلمان شروع به‌سوزاندن ورشوکرد ، سرپینسکی مجبورشد، به‌کمك دوستان خود ، شهررا ترك‌کند وبه حومهٔ **مه‌خووسکی** برود .

در فوریهٔ ۱۹۴۵ ، بعد ازآنکه لهستان بوسیلهٔ ارتش شوروی‌آزادشد، سرپینسکی پیاده به‌کراکوو برگشت وبه دانشگاه وارد شد . درآنجا به‌ایراد سخنرانیها وچاپ مقاله‌ها وکتابهای خود پرداخت وبعد ازچندماه چاپ‌مجلهٔ «F. M» را ،که درزمان جنگ قطع‌شده بود، از سرگرفت .

ازپائیز ۱۹۴۵ ، سرپینسکی به‌ورشو بازگشت وبا پشتکار فوق‌العاده به تجدید حیات دانشگاه پـرداخت . دوباره سخنـرانیهای او در دانشگاههای مختلف اروپا ، هنـد ، امریکا ، کانادا و شـرکت در کنفرانسها و کنگره‌ها شروع شد .

فعالیتهای سرپینسکی ، در جمهوری مردم لهستان ، ارج بسیارگذاشته شد . درسال۱۹۴۹، جایزهٔ درجه اول دولتی به‌او داده‌شد ؛ درسال۱۹۵۱، به‌مناسبت بیستمین سال انجام‌وظیفهٔ ریاست مجمع‌علمی ورشو ، مدالی بانقش برجستهٔ سرپینسکی ضرب شد .

سرپینسکی درسالهای ۱۹۵۲-۱۹۵۷ نایب‌رئیس آکادمی علوم لهستان بود . در آوریل ۱۹۵۷ ، شرکت دراجلاسیهٔ علمی اتحاد جماهیرشوروی را، که به‌مناسبت دویست و پنجاهمین سال تولد **لئونارد اولر** تشکیل شده‌بود ، قبول‌کرد. درهمین‌سال، اوچاپ «Acta Arithmetica» رابنیان‌گذاشت، که تنهامجله‌ای درجهانست‌که‌به‌مسائل مربوط به‌نظریهٔ اعداد می‌پردازد .

در ۲۰سال اخیر ، دوباره نظریهٔ اعداد، جای مهمی را در بین‌کارهای سرپینسکی ، اشغال‌کرده است . نتایج فراوانی که سرپینسکی و شاگردان او (که مشهورترین‌آنها **آندره شینتسل** می‌باشد) بدست آوردند، به‌غنای نظریهٔ اعداد وبخصوص نظریهٔ مقدماتی اعداد ، کمك فراوانی‌کرده است .

هنوزهم سرپینسکی ، مثل سالهای‌گذشته ، به‌نشر مقاله‌های بکروبدون رقیب و چاپ کتابهای اختصاصی و عمومـی مشغول است . آنچه تاکنون از

سرپینسکی چاپ شده‌است، بالغ بر ۷۰۰ عنوان است ،که در بین آنها ۳۰عنوان مربوط به‌کتابهای درسی وعمومی است .

دانشگاههای‌ده‌شهر : **آمستردام** ، **بوردو** ، **پراتسلاو** ، **لاکهنااو** (هند)، **له‌وو** ، **مسکو** ، **پاریس** ، **پراگ** ، **صوفیه** و **تارتو** ، به سرپینسکی دکترای افتخاری داده‌اند . سرپینسکی نایب رئیس آکادمی بین‌المللی علوم فلسفی ، عضو وابستهٔ آکادمی علوم بلغارستان ، ایتالیا ، پاریس ، رومانی ، نیویورك، چکوسلواکی و غیره می‌باشد . او همچنین عضو وابستهٔ انجمن ریاضی‌دانهای لندن و بسیاری از انجمنهای علمی دیگر است .

واتسلاوسرپینسکی ، آکادمیسین‌قدیمی‌لهستان‌است ، او سه‌نسل‌شاگردان را تربیت‌کرده است ،که ازمیان آنها ریاضی‌دانهای بزرگی پیدا شده است . فعالیت‌خلاق وبدون وقفهٔ او درجریان‌شصت‌سال، شهرت وجلائی به‌علم‌لهستانی داد . حق است‌که سرپینسکی را پدر مکتب ریاضی لهستان می‌نامند .

ای. ملنیکوو

نظریهٔ مقدماتی اعداد باید یکی ازبهترین موضوعها، برای آموزش ابتدائی ریاضیات بحساب آید . برای آموزش این رشته اطلاعات قبلی بسیار محدودی لازم است ، موضوع آن قابل درك وروشهائی که در آن بکار می‌رود ، ساده ، کلی ومعدود است . بین‌علوم‌ریاضی، هیچ علمی نمی‌تواند ازلحاظ ارضای کنجکاوی طبیعی آدمی ، با آن برابری کند[1].

دربارهٔ این کتاب

نظریهٔ اعداد ازخیلی قدیم ، و در یونان باستان ، بوجودآمد ، ولی پیشرفت آن به کندی صورت گرفت . علاقهٔ جدی نسبت به موضوع نظریهٔ اعداد تا حد زیادی به کوششهای **پ. فرما** (۱۶۰۱-۱۶۶۵) مربوط است . نظریهٔ اعداد ، به‌عنوان یك علم مستقل ، رسمیت مقدماتی خود را درقرن هیجدهم و به مناسبت کارهای متعدد **ل. اولر** (۱۷۰۷-۱۷۸۳) بدست آورد . پیشرفتهای بعدی باتحقیقات **ك. ف. گوس** (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ودانشمندان بعد ازاوانجام گرفت . بررسیهای **پ. ل. چبیشف** (۱۸۲۱-۱۸۹۴) وریاضی‌دانهای روسی و شوروی، سهم زیادی درتکامل نظریهٔ اعداد داشت . کارهای **ای.م. وینوگرادوف**، **یو. و. لینیك** ، **ل.گ.شنیرلمان** وسایر ریاضی‌دانهای شوروی ، درزمینهٔ نظریهٔ اعداد ، اهمیت جهانی دارد . سهم ریاضی‌دانهای سایر کشورهای جهان هم در تکامل نظریهٔ اعداد جدی وقابل توجه است .

---

۱) این‌عبارت متعلق به **گ. ه. هاردی** است ، که‌سرپینسکی آنرا درسر لوحهٔ کتاب خود به‌نام «۲۰۰ مسئله دربارهٔ نظریهٔ مقدماتی اعداد» (که به‌زبان لهستانی چاپ‌شده است) آورده است .

درزمان ما ، نظریهٔ اعداد یکی ازرشته‌های وسیع ومشکل ریاضیات‌شده است . این علم در جهات مختلف تکامل یافته و از روشهای متنوعی استفاده می‌کند .

کاملاً طبیعی‌است‌که مطالب مربوط به‌حساب‌براساس‌روشهای«مقدماتی»، یعنی روشهای حسابی وجبر مقدماتی قرارگرفته باشد . دربعضی موارد ، این توقع بطور نسبی بسادگی برآورده می‌شود . ولی در بعضی موارد جستجوی اثبات مقدماتی به اشکالاتی‌برخورد می‌کند وهمیشه هم به‌موفقیت نمی‌انجامد. وقتی‌که **آرتین** ، **واندروردن** ، **سلبرگ** و دیگران مسائل مشکلی ازنظریهٔ اعداد را با روشهای مقدماتی حل‌کردند ، همهٔ دنیای ریاضیات را به شگفتی انداخت ، ولی راه حلهای آنها بسیار مشکل است وفهمیدن و یا آماده‌کردن آنها برای خواننده ، صرف وقت ودقت زیادی لازم دارد .

مسائلی‌که در این‌کتاب آمده است ، مربوط به نظریهٔ مقدماتی اعداد است . (مقدماتی به معنای معمولی کلمه) ، بهمین مناسبت قسمت عمدهٔ کتاب می‌تواند مورد استفادهٔ‌گروه وسیعی قرارگیرد . درکتاب به مسائل مشکلی هم برخورد می‌کنیم‌که بعضی ازآنها بتازگی وبوسیله دانشمندانی‌مثل **سرپینسکی**، **اردیوش**، **شینتسل** و دیگران بررسی شده است . شمارهٔ اینگونه مسائل رابا ستاره مشخص‌کرده‌ایم .

اصل این‌کتاب در ۱۹۶۴ ، درلهستان منتشر شدکه شامل ۲۰۰ مسئله با اضافاتی است . در چاپ حاضر ، علاوه براین مسائل ، قریب چهل مسئلهٔ جدید وجود دارد ،که بوسیلهٔ مؤلف برای من فرستاده شده است .

این‌کتاب را نمی‌توان کتاب مسئله‌ای دربارهٔ نظریهٔ اعداد دانست ، در این کتاب دربارهٔ بعضی از مباحث برنامهٔ درسی تمرین و یا مسئله‌ای دیده نمی‌شود . باوجود این مسائل‌این‌کتاب وراه‌حلهای‌کوتاه‌آنها ، می‌تواندوسیلهٔ پرقدرتی برای شکل‌دادن به تفکرو استدلال ریاضی خواننده باشد وبه‌عنوان کار اضافی درزمینهٔ نظریهٔ مقدماتی اعداد مورد استفاده قرار گیرد . مطالعهٔ این‌کتاب می‌تواند عادت‌به‌درست اندیشیدن را بوجودآوردکه درهمهٔ رشته‌های ریاضی شرط اول‌کار است ...

درکتاب ، به‌عنوان ضمیمه ، دوقسمت اضافه شده است‌که ترجمه‌ای‌است

ازکتاب سرپینسکی بنام «نظریهٔ مقدماتی اعداد» ، کـه در ۱۹۶۴ در ورشو بهزبان انگلیسی چاپ شده است . در ضمیمهٔ اول ، اثبات کامـلا مقدماتی از پوستولات برتران داده استکه بوسیلهٔ پ. اردیوش طرح شده است ، و در ضمیمهٔ دوم اثبات قضیهٔ شرك از خود سرپینسکی .

درکتاب تبصرههائی وجود داردکه ازمن است وبوسیلهٔ شمارههائی کـه داخلکروشه قرارگرفتهاند مشخص شده است ...

ای . ملنیکوو

۱. قابلیت تقسیم

۱. مطلوبست همهٔ عددهای طبیعی n ،که به‌ازای آنها عدد n^2+1 بر $n+1$ قابل قسمت باشد .

۲ مطلوبست همهٔ‌عددهای $x\neq 3$ ، بطوری‌که x^3-3 بر $x-3$ قابل قسمت باشد .

۳. ثابت‌کنیدکه اگر a^2+b^2 بر ۷ قابل قسمت باشد (a و b عددهای صحیح‌اند) ، a و b مضربی از ۷ خواهند بود .

۴. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که به‌ازای آنها عدد $۴n^۲+۱$ برهردو عدد ۵ و ۱۳ قابل قسمت باشد .

۵. ثابت کنید که برای عددهای طبیعی n، عدد $۳^{۳n}+۳-۲۶n-۲۷$ مضربی از ۱۶۹ می‌باشد .

۶. ثابت کنید که برای $k=۰,۱,۲,\ldots$ ، عدد $۲^{۲^{۶k+۲}}+۳$ بر ۱۹ قابل قسمت است .

۷. ثابت کنید $۲^{۳۷۰}+۳^{۲۷۰}$ بر۱۳ قابل قسمت است .

۸. اگر $F_n=۲^{۲^n}+۱$ و $n=۱,۲,\ldots$ باشد ، ثابت کنید $۲^{F_n}-۲$ بر F_n قابل قسمت است .

۹. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $۲^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد .

۱۰. ثابت کنید که اگر k عددی فرد و n عددی طبیعی باشد ، $k^{۲^n}-۱$ بر $۲^{n+۲}$ قابل قسمت است .

۱۱. ثابت کنید که $۲۰^{۱۵}-۱$ بر $۶۱\times۳۱\times۱۱$ قابل قسمت است.

۱۲. ثابت کنید که اگر m عددی طبیعی و $a>۱$ باشد ، داریم* :

$$\left(\frac{a^m-۱}{a-۱}\ ,\ a-۱\right)=(a-۱,m)$$

۱۳. ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی باشد ، عدد $۳(۱^۵+۲^۵+\ldots+n^۵)$ بر عدد $۱^۳+۲^۳+\ldots+n^۳$ قابل قسمت است.

۱۴. عددهای طبیعی $n>۱$ را چنان پیدا کنید که به‌ازای آنها عدد $۱^n+۲^n+\ldots+(n-۱)^n$ بر n قابل قسمت باشد .

---

*) علامت (a,b) یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b

۱۵. تحقیق کنید به ازای مقادیر طبیعی n ، از عددهای $a_n = ۲^{۲^{n+۱}} - ۲^{n+۱} + ۱$ و $b_n = ۲^{۲^{n+۱}} + ۲^{n+۱} + ۱$ همیشه یکی قابل قسمت بر ۵ و دیگری غیر قابل قسمت بر ۵ است . شرایط n را برای هر حالت پیداکنید .

۱۶. ثابت‌کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد طبیعی برای x وجود دارد ، بطوریکه هر یك از جمله‌های دنبالهٔ نامحدود

$$x+۱ \ , \ x^x+۱ \ , \ x^{x^x}+۱ \ , \ x^{x^{x^x}}+۱ , \cdots$$

بر n قابل قسمت باشد .

۱۷. ثابت‌کنیدکه بی‌نهایت عدد فرد n وجوددارد که وقتی x عددی زوج باشد ، هیچیك از جمله‌های دنبالهٔ

$$x^x+۱ , x^{x^x}+۱ \ , \ x^{x^{x^x}}+۱ , \cdots$$

بر n قابل قسمت نباشند .

۱۸. ثابت‌کنیدکه به‌ازای همهٔ مقادیر طبیعی n ، عدد $(n+۱)^n - ۱$ بر $n^۲$ قابل قسمت است .

۱۹. ثابت‌کنیدکه برای همهٔ مقادیر طبیعی n ، عدد $۲^{(۲^n - ۱)n} - ۱$ بر $(۲^n - ۱)^۲$ قابل قسمت است .

۲۰. ثابت‌کنیدکه بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بطوریکه به‌ازای آنها $۲^n + ۱$ بر n قابل قسمت باشد ، همهٔ عددهای اول n راکه دارای این خاصیت هستند پیداکنید .

۲۱.* عددهای فرد n را طوری پیداکنیدکه $۳^n + ۱$ بر n قابل

قسمت باشد .

*۲۲. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $a>1$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی‌که a^n+1 بر n قابل قسمت باشد .

*۲۳. ثابت کنیدکه بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که 2^n+2 بر n قابل قسمت باشد .

۲۴. عددهای طبیعی a را طوری پیداکنید،که به‌ازای آنها، عدد $a^{10}+1$ بر ۱۰ قابل قسمت باشد .

*۲۵. ثابت کنیدکه عددطبیعی $n>1$ وجودندارد، بطوریکه عدد 2^n-1 بر n قابل قسمت باشد .

۲۶. عددهای طبیعی n را طوری پیدا کنید که به ازای آنها $n.2^n+1$ بر ۳ قابل قسمت باشد .

۲۷ ثابت کنیدکه برای هرعدد فرد اول p ، بی‌نهایت عددطبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $n.2^n+1$ بر p قابل قسمت باشد .

۲۸. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد های طبیعی $x>n$ و y وجود دارند ، بنحوی که y^y بر x^x قابل قسمت ، ولی y بر x غیر قابل قسمت باشد .

۲۹. ثابت کنیدکه بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که عدد n^2-3 برمجذورکاملی بزرگتر ازواحد قابل قسمت باشد، کوچکترین عدد طبیعی n را در این مورد پیداکنید .

*۳۰. ثابت کنیدکه‌اگر n عددی‌فرد باشد، $2^{n!}-1$ بر n قابل‌قسمت است .

۳۱. ثابت کنیدکه در دنبالهٔ نامحدود

$$۲^n - ۳ \quad (n = ۲,۳,۴,\cdots)$$

بی‌نهایت عدد مضرب ۵ و بی‌نهایت عدد مضرب ۱۳وجود دارد ، ولی‌حتی یك عدد مضرب ۱۳×۵ وجود ندارد .

۳۲.* اگر n عددی مرکب (غیراول) باشد ، دو جواب کوچکتر را برای n طوری پیداکنیدکه $۲^n - ۲$ بر n و $۳^n - ۳$ بر n قابل‌قسمت باشند .

۳۳.* کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنیدکه $۲^n - ۲$ بر n قابل قسمت باشد و $۳^n - ۳$ بر n قابل قسمت نباشد .

۳۴. کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیداکنیدکه $۳^n - ۳$ بر n قابل قسمت باشد و $۲^n - ۲$ بر n قابل قسمت نباشد .

۳۵. برای هر عدد طبیعی a ، عدد مرکب n را طوری پیداکنید که $a^n - a$ بر n قابل قسمت باشد .

۳۶. ثابت کنید که‌اگر برای عددهای صحیح a ، b و c ، عدد $a^۳+b^۳+c^۳$ بر ۹ قابل قسمت باشد ، لااقل یکی ازعددهای a،b،c بر ۳ قابل قسمت است .

۳۷. ثابت‌کنیدکه اگر برای اعداد صحیح a_k $(k = ۱,۲,۳,۴,۵)$ عدد $a_۱^۳+a_۲^۳+a_۳^۳+a_۴^۳+a_۵^۳$ بر ۹ قابل قسمت باشد ، $a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵$ بر ۳ قابل قسمت خواهد بود .

۳۸. ثابت کنید که اگر x، y و z اعدادی طبیعی ، $(x,y)=۱$ و $x^۲+y^۲=z^۴$ باشد ، xy بر ۷ قابل‌قسمت‌استوضمناً شرط $(x,۷)=۱$ شرط لازمی است .

۳۹.* ثابت کنید که بی‌نهایت زوج اعداد طبیعی x و y وجود دارد بنحوی‌که $y(y+1)$ بر $x(x+1)$ قابل‌قسمت باشد ، ولی y بر x یا $x+1$ و $y+1$ بر x یا $x+1$ قابل قسمت نباشد . کوچکترین جواب x و y را پیداکنید .

۴۰. برای هر عدد طبیعی $s \leqslant 25$ و همچنین برای $s = 100$ ، کوچکترین عدد طبیعی n_s را طوری پیداکنیدکه‌مجموع ارقامش مساوی s (درعدد شماری به مبنای ۱۰) و بر s قابل قسمت باشد .

۴۱.* ثابت‌کنیدکه‌برای هرعددطبیعی s، عددطبیعی n وجود دارد که مجموع ارقام آن (در عدد شماری به مبنای ده) مساوی s و بر s قابل قسمت است .

۴۲.* ثابت‌کنید

a) هر عدد طبیعی مقسوم علیه‌هائی به شکل $4k+1$ دارد ، که تعداد آنها از مقسوم‌علیه‌های به‌شکل $4k+3$ کمتر نیست .

b) بی‌نهایت عددطبیعی وجود داردکه تعدادمقسوم‌علیه‌های طبیعی هر یك از آنهاکه به شکل $4k+1$ است ، با تعداد مقسوم‌علیه‌هائی که بشکل $4k+3$ است ، برابر است .

c) بی‌نهایت عدد طبیعی وجود داردکه‌تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی به‌شکل $4k+1$ در مورد هر یك از آنها ، بیش ازتعدادمقسوم‌علیه‌های طبیعی به‌شکل $4k+3$ است .

۴۳. a ، b و cعددهای صحیح دلخواه و n عددی طبیعی بزرگتر از ۳ است . ثابت‌کنید عدد صحیح k وجود دارد ، بنحوی‌که هیچیك‌از عددهای $k+a$ ، $k+b$ و $k+c$ بر n قابل قسمت نباشند .

۲ . عددهائی که نسبت بهم اولند

۴۴. ثابت کنید

a) برای $n=1,2,\ldots$ داریم : $(n,2^{2^n}+1)=1$.

b) بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $(n,2^n-1)>1$ باشد . کوچکترین آنها را پیدا کنید .

۴۵. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد صحیح k ، عددهای $2k+1$ و $9k+4$ نسبت بهم اولندو برای عددهای $2k-1$ و $9k+4$ ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را بدست آورید .

۴۶. ثابت کنید

a) **دنبالهٔ صعودی نامحدود ازعددهای مثلثی (یعنی عددهای به‌شکل $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$؛ $n=1,2,\ldots$) وجود دارد که دوبه‌دو نسبت بهم اولند.**

b) **دنبالهٔ صعودی نامحدودی از عددهای به‌شکل چهار وجهی** (یعنی عددهای به‌شکل $T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$؛ $n=1,2,\ldots$) **وجود دارد که دو به‌دو نسبت بهم اولند.**

۴۷. اگر a و b دو عدد مختلف صحیح باشند ، ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که عددهای $a+n$ و $b+n$ نسبت بهم اول باشند .

۴۸.* a ، b و c سه عددصحیح مختلف‌اند . ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود داردبنحوی که عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ دو به‌دو نسبت بهم اول باشند .

۴۹. نمونه‌ای برای چهارعدد صحیح مختلف a,b,c و d پیدا کنید

که در مورد آنها حتی یك عدد طبیعی n وجود نداشته باشد ، بنحوی که $a+n$ ، $b+n$ ، $c+n$ و $d+n$ دو به دو نسبت بهم اول شوند .

۵۰. ثابت‌کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۶ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد بزرگتر از واحد نوشت‌که نسبت بهم اول باشند.

۵۱.* ثابت کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱۷ را می‌توان بصورت‌مجموع سه‌عدد بزرگتراز واحد نوشت، که دوبه‌دو نسبت‌بهم اول باشند و ضمناً عدد ۱۷ دارای این خاصیت نیست .

۵۲.* ثابت‌کنیدکه هر عدد زوج $2k$ را می‌توان بصورت تفاضل دو عدد طبیعی مختلف نوشت ، بطوریکه هر یك از آنها نسبت به عدد طبیعی مفروضی مثل m اول‌باشد .

۵۳.* ثابت کنید که از دنبالهٔ فیبوناچی (که با شرایط $u_1=u_2=1$ ، $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ برای $n=1,2,\ldots$ معین می‌شود) می‌توان دنبالهٔ صعودی نامحدودی درست کرد که جمله‌های آن دوبه‌دو نسبت بهم اول باشند .

۳. تصاعد حسابی

۵۴. ثابت کنیدکه تصاعدهای حسابی (باتعداد جمله‌های دلخواه) وجود دارد که جمله‌های هر یك ازآنها ، دوبه‌دو نسبت بهم‌اول باشند .

۵۵. ثابت‌کنیدکه‌برای هر عدد طبیعی k ، مجموعهٔ همهٔ‌عددهای طبیعی n ، که در مورد آنها تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی مضربی از k است ، شامل یك تصاعد حسابی نامحدودند .

۵۶. ثابت کنید که بی‌نهایت دستگاه عددهای طبیعی x، y و z

وجود دارد بنحوی که عددهای $x(x+1)$ ، $y(y+1)$ و $z(z+1)$ تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی بدهند .

۵۷ . همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که اضلاع آنها اعدادی طبیعی و به تصاعد حسابی باشند .

۵۸ . تصاعد حسابی صعودی نامحدودی ، باکوچکترین قدر نسبت ممکنه، پیدا کنید که جمله‌های آن عددهای طبیعی باشد وحتی یکی از آنها عدد مثلثی نباشد .

۵۹ . مطلوبست شرط لازم و کافی برای اینکه تصاعد حسابی $ak+b$ $(k=0,1,2,\cdots)$ که در آن a و b عددهای طبیعی هستند، شامل بی‌نهایت جملهٔ مجذور کامل باشد .

۶۰ . ثابت کنید تصاعدهای حسابی (با تعداد جمله‌های دلخواه) وجود دارد ، بنحوی که جمله‌های آن مختلف و هر یك از آنها توانی از یك عدد طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۱ . ثابت کنید که تصاعد حسابی نامحدودی وجود ندارد ، بنحوی که جمله‌های آن مختلف و هر یك از آنها توانی از یك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۲ . ثابت کنید که نمی‌توان چهار عدد طبیعی متوالی پیدا کرد ، بنحوی که هریك از آنها توانی از یك عدد طبیعی بانمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۳ . ثابت کنید که در هر تصاعد حسابی صعودی ، که جمله‌های آن عددهای طبیعی است، فاصله‌ای به‌طول دلخواه وجود دارد که فقط از عددهای مرکب تشکیل شده است .

۶۴. * a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اولند ؛ ثابت‌کنیدکه‌در تصاعد حسابی $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ بی‌نهایت جمله وجود دارد که نسبت به‌عدد طبیعی m اولند .

۶۵ . ثابت کنیدکه‌درهر تصاعدحسابی‌صعودی، که‌ازعددهای‌طبیعی **تشکیل‌شده است، عددهائی وجوددارد‌که s رقم اول آنها (دردستگاه عدد** شماری‌به‌مبنای ۱۰) دلخواه‌باشند .

۶۶ . مطلوبست همهٔ تصاعدهای حسابی صعودی ، که از سه‌جملهٔ دنبالهٔ فیبوناچی (مسئلهٔ ۵۳ را ببینید) تشکیل شده باشد . ثابت کنید که نمی‌توان ازجمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی یك‌تصاعد حسابی‌چهارجمله‌ای درست‌کرد .

۶۷. * تصاعد حسابی صعودی با حداقل قدر نسبت پیدا کنید ، بطوری‌که از عددهای طبیعی تشکیل‌شده‌باشد و شامل‌هیچیك‌ازجمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی نباشد .

۶۸ . * اگر a و b دو عدد طبیعی ونسبت بهم اول باشند ، تصاعد حسابی $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ را چنان پیداکنید که شامل هیچیك از جمله‌های‌دنبالهٔ فیبوناچی نباشد .

۶۹ . اگر a و b دو عدد طبیعی‌ونسبت بهم‌اول باشند ، ثابت‌کنید در هر تصاعد حسابی $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ ، بی‌نهایت جمله وجود داردکه دوبه‌دو نسبت بهم اولند .

۷۰ . * ثابت‌کنیددرهر تصاعدحسابی $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ و a و b عددهای طبیعی)، بی‌نهایت‌جمله‌وجوددارد‌که‌دارای‌یکنوع‌مقسوم‌علیه‌های اول هستند .

۷۱ . از قضیهٔ **دیریکله** ، کـه بـر طبق آن در هـر تصاعد حسابـی $ak+b$ ($k=0,1,2,\ldots$ و a و b دو عدد طبیعی ونسبت بهم اول)، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد [۱] ، نتیجه بگیرید: در هرچنین تصاعدی، بی‌نهایت جمله وجوددارد کههریك ازآنهاحاصلضربی‌از s عدد مختلف اول باشند .

۷۲ . همهٔ تصاعدهای حسابی با قدر نسبت ۱۰ را چنان پیداکنید که از بیش از دو عدد اول تشکیل شده باشند .

۷۳ . مطلوبست همهٔ تصاعدهای حسابی با قدر نسبت ۱۰۰ که از بیش از دو عدد اول تشکیل شده باشند .

۷۴* . تصاعد حسابی صعودی ده جمله‌ای پیدا کنید که از اعداد اول تشکیل شده باشد و ضمناً آخرین جملهٔ آن‌کوچکترین عدد ممکن با این شرایط باشد .

۷۵ . نمونه‌ای از تصاعد حسابی صعودی و نامحدود بدهیدکه از عددهای طبیعی تشکیل شده باشد و هیچیك از جمله‌های آن مجموع یا تفاضل دو عدد اول نباشد .

۴. عددهای اول ومرکب

۷۶ . ثابت‌کنید کـه بـرای هـر عدد زوج $n>6$ ، عددهای اول p و q ،کوچکتراز $n-1$ ،وجوددارد،بنحوی‌که $(n-p,n-q)=1$ باشد .

۷۷ . همهٔ عددهای اولی را پیداکنید که در عین حال مجموع و تفاضل دو عدد اول باشند .

۷۸ . کوچکترین سه عدد طبیعی n را چنان پیدا کنید که بین

n و $n+۱۰$ حتی یك عدد اول وجود نداشته باشد ؛ همچنین کوچکترین سه عدد طبیعی m را طوری پیدا کنید که بین m و $(m+۱)۱۰$ حتی یك عدد اول وجود نداشته باشد .

۷۹ . ثابت کنید هر عدد اول که بصورت $۴k+۱$ باشد ، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن با عددهای طبیعی قابل بیان هستند .

۸۰ . اگر p ، q و r عددهائی اول باشند ، چهار جواب معادلهٔ $p^۲+۱=q^۲+r^۲$ را بدست آورید .

۸۱ . ثابت کنید که اگر p ، q ، r ، s و t عددهائی اول باشند ، معادلهٔ زیر جواب ندارد :

$$p^۲+q^۲=r^۲+s^۲+t^۲$$

۸۲* . تمام جوابهای معادلهٔ زیر را ، برای عددهای اول p ، q و r بدست آورید :

$$p(p+۱)+q(q+۱)=r(r+۱)$$

۸۳* . عددهای اول p ، q و r را چنان پیدا کنید که عددهای $p(p+۱)$ ، $q(q+۱)$ و $r(r+۱)$ یك تصاعد حسابی صعودی تشکیل دهند .

۸۴ . همهٔ عددهای طبیعی n را طوری پیدا کنید که هر یك از ۶ عدد $n+۱$ ، $n+۳$ ، $n+۷$ ، $n+۹$ ، $n+۱۳$ و $n+۱۵$ اول باشند .

۸۵ . همهٔ عددهای صحیح $k\geqslant ۰$ را پیدا کنید ، بنحوی که دنبالهٔ

$$k+۱,k+۲,\cdots,k+۱۰$$

شامل حداکثر عددهای اول باشد .

۸۶ .همهٔ عددهای صحیح $k \geqslant ۰$ را پیداکنید ، بنحوی که تعداد عددهای اول در دنبالهٔ

$$k+۱, k+۲, \cdots, k+۱۰۰$$

حداکثر باشد .

۸۷ . صد عدد طبیعی متوالی پیداکنیدکه‌شامل ۲۵ عدد اول‌باشد، همهٔ جوابها را معین‌کنید .

۸۸ . تمام عددهای‌اول p را چنان پیداکنیدکه $۲^p+۱$ بر pقابل قسمت باشد .

۸۹ . مطلوبست همهٔ فواصلی از عددهای طبیعی متوالی،بطوریکه هر یك از آنها از ۲۱ عدد تشکیل شده باشد و شامل ۸ عدد اول باشد.

۹۰ . همهٔ عددهای p را چنان پیداکنید که هر یك از شش عدد p ، $p+۲$ ، $p+۶$ ، $p+۸$ ، $p+۱۲$ و $p+۱۴$ اول‌باشند .

۹۱ . ثابت‌کنید که بی‌نهایت زوج‌عدد طبیعی m و n وجوددارد، بنحوی‌که‌اولا مقسوم‌علیه‌های اول‌عددهای m و n برای هردوعدد یکی باشد، ثانیاًمقسوم‌علیه‌های‌اول عددهای $m+۱$ و $n+۱$ برای‌هر دوی آنها یکی باشد .

۹۲ . اگر n عددی طبیعی باشد ، تمام عددهای اول راکه بصورت $\frac{n(n+۱)}{۲}-۱$ باشند، پیدا کنید .

۹۳ . مطلوبست همهٔ عددهای اول بصورت $T_n+۱$ ،که درآن n عددی طبیعی و $T_n=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ باشد.

۹۴. ثابت‌کنید که برای هر عدد طبیعی s ، عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که عدد $۲^n - ۱$ لااقل s مقسوم‌علیه اول مختلف داشته باشد .

۹۵. پنج عدد اول پیدا کنید ، بطوریکه هریك مساوی مجموع توانهای چهارم دو عدد طبیعی باشد .

۹۶. ثابت‌کنید که بی‌نهایت زوج عدد اول متوالی وجود داردکه غیر از زوج اعداد اول توام[۱] هستند .

۹۷. براساس قضیهٔ دیریکله(مسئلهٔ ۷۱ را ببینید) در بارهٔ تصاعد حسابی ، ثابت کنیدکه بی‌نهایت عدد اول وجود داردکه هیچیك از آنها متعلق به زوج اعداداول توام نیستند .

۹۸. پنج جواب‌کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیداکنید که به ازای آنها عدد $n^۲ - ۱$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف باشد .

۹۹. پنج جواب‌کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیداکنید که‌به‌ازای آنها عدد $n^۲ + ۱$ مساوی‌حاصلضرب سه عدداول مختلف‌باشد، و عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که $n^۲ + ۱$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف و فرد باشد .

۱۰۰ . ثابت‌کنید

*a) بین هر سه عدد طبیعی متوالی بزرگتر از۷؛ لااقل یکی‌دارای دو مقسوم‌علیه مختلف اول است ؛

---

۱) زوج اعداد اول توام ، به دو عدد اولی‌گفته می‌شودکه تفاضل آنها مساوی ۲ باشد «مترجم»

b) از هر ۲۴ عدد طبیعی متوالی بزرگتر از ۵، لااقل یکی‌دارای سه‌مقسوم‌علیه مختلف اول است .

۱۰۱ . پنج جواب کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیدا کنیدکه به‌ازای‌آنها هر یك ازعددهای n ، $n+1$ و $n+2$ حاصلضرب دو عدد اول‌مختلف‌باشند ؛ وثابت‌کنیدکه چهار عددطبیعی‌متوالی‌نمی‌توان یافت بطوریکه هر یك از آنها حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشند ؛ نمونه‌ای از چهار عدد طبیعی متوالی بدهید که هر یك از آنها تنها دو مقسوم‌علیه اول داشته باشند .

۱۰۲ . ثابت‌کنید قضیهٔ مربوط به‌وجودتعداد محدودی عددطبیعی n ،که به‌ازای آنها عددهای n و $n+1$ تنها یك مقسوم‌علیه اول‌دارند، با قضیهٔ مربوط‌به محدود بودن تعداد عددهای اول«**مرسه‌نا**»ومحدود بودن تعداد عددهای اول **فرما** ، هم‌ارز است .

۱۰۳ . همهٔ عددهائی را پیداکنیدکه بصورت $۲^n - ۱$ (n عددی است طبیعی) و ازیك ملیون‌کوچکتر و قابل تبدیل‌بدحاصلضرب دو عدد اول باشند؛ و ثابت‌کنیدکه اگر n عددی زوج وبزرگتر از ۴ باشد ، عدد $۲^n - ۱$ حاصلضرب لااقل سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد است .

۱۰۴ . با استفاده‌از مسئلهٔ ۵۰ ثابت‌کنیدکه ، وقتی $k \geqslant ۳$ باشد ، نامساوی زیر برقرار است :

$$p_{k+1} + p_{k+2} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_k$$

p_k به‌معنی k امین عدد اول است .

۱۰۵ . q_n راکوچکترین عدد اولی می‌گیریم ،که‌مقسوم‌علیه عدد

طبیعی n نباشد. با استفاده ازمسئلهٔ ۱۰۴ ، ثابت‌کنیدکه نسبت $\frac{q_n}{n}$ ، وقتی که n بطور نامحدود صعودی باشد ، بسمت صفر میل می‌کند .

۱۰۶ . ثابت‌کنیدکه از قضیهٔ **چبیشف** ،که طبق آن برای هر عدد طبیعی $n>1$ لااقل یك عدد اول بین n و ۲n قرار گرفته است [۲] ، این قضیه را می‌توان نتیجه گرفت که برای هـر عدد $n>4$ ، بین n و ۲n لااقل یك عدد وجود داردکه حاصلضرب دو عدد اول مختلف است ، و برای عدد طبیعی $n>15$ بین n و ۲n لااقل یك عدد وجود دارد که حاصلضرب‌سه عدد اول مختلف است .

۱۰۷ . ثابت‌کنیدکه از قضیهٔ چبیشف می‌توان نتیجه‌گرفت‌که وقتی عدد n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم . بین n و ۲n لااقل یك عدد وجود دارد که حاصلضرب s عدد اول مختلف باشد (s عدد طبیعی دلخواهی است) .

۱۰۸ . ثابت‌کنید بین عددهای دنبالهٔ نامحدود

۱,۳۱,۳۳۱,۳۳۳۱,۰۰۰

بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد ،کوچکترین عدد مرکب این دنباله را پیداکنید .

۱۰۹ . کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که به ازای آن $n^4+(n+1)^4$ عددی مرکب باشد .

۱۱۰ . ثابت‌کنیدکه‌بین‌عددهای 10^n+3 $(n=1,2,\ldots)$ ، بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد .

۱۱۱ . ثابت‌کنیدکه‌به‌ازای‌هرعددطبیعی $n>1$ ،عدد $\frac{1}{5}(2^{4^{n+2}}+1)$

مرکب است .

۱۱۲ . ثابت کنید که در دنبالهٔ $۲^n - ۱ (n = ۱,۲,...)$ فاصله‌ای بطول‌دلخواه وجود دارد که تنها از عددهای مرکب تشکیل شده باشد .

۱۱۳ . نادرستی این حکم را روشن‌کنیدکه از هر عدد طبیعی ، می‌توان با تغییر یکی از ارقام آن ، عددی اول درست‌کرد .

۱۱۴ . ثابت‌کنیدکه قضیهٔ چبیشف C ، مبنی براینکه برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ لااقل یك عدد اول بین n و ۲n قراردارد[۱] ، هم‌ارز قضیهٔ T است مبنی براینکه برای‌عدد طبیعی $n > ۱$ ، در تجزیه $n!$ به عوامل اول ، لااقل یك عامل با نمای واحد وجود دارد . هم‌ارز بودن دو قضیه به‌معنای آنست‌که از هرکدام می‌توان دیگری را نتیجه‌گرفت .

۱۱۵ . با استفاده از این قضیه‌که برای عدد طبیعی $n > ۵$ لااقل دو عدد اول بین n و ۲n قراردارد ، ثابت‌کنید که برای هر عدد طبیعی $n > ۱۰$ ، در تجزیهٔ عدد $n!$ به‌عوامل اول ، لااقل دوعامل اول با نمای واحد وجود دارد .

۱۱۶ . براساس قضیهٔ **دیریکله** دربارهٔ تصاعد حسابی ، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد اول p وجود دارد ، بنحوی‌که هریك از عددهای $p - ۱$ و $p + ۱$ بیش از n مقسوم‌علیه طبیعی مختلف داشته باشند .

۱۱۷* . براساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی . ثابت‌کنید که برای هرعدد طبیعی n ، عدد اول p وجود دارد بنحوی‌که هریك از

---

۱) به‌ضمیمهٔ آخرکتاب مراجعه‌کنید .

عددهای $p-1$ ، $p+1$ و $p+2$ دارای لااقل n مقسوم‌علیه اول مختلف باشند .

۱۱۸ . ثابت کنید که اگر n عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد، هر دو عدد n و $n+2$ تنها وقتی اول هستند که عدد $(n-1)!+1$ نه بر n و نه بر $n+2$ قابل قسمت نباشد .

۱۱۹ . براساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی ، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، عدد اولی وجود دارد که مجموع رقمهای آن در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده ، بیشتر از m باشد .

۱۲۰ . براساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی ، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، عدد اولی وجود دارد که وقتی در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده نوشته شود ، لااقل m صفر داشته باشد .

۱۲۱ . مطلوبست همهٔ عددهای اول p ، بنحوی که مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد p^4 مجذور یك عدد طبیعی باشد .

۱۲۲ . اگر s عددی طبیعی و $2<s<10$ باشد ، مطلوبست همهٔ عددهای اولی که در مورد هر یك از آنها ، مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی مساوی توان s ام یك عدد طبیعی باشد .

۱۲۳ . قضیهٔ **لیوویل** را ثابت کنید که برطبق آن برای عدد اول $p>5$ و عدد طبیعی m ، تساوی $(p-1)!+1=p^m$ ممکن نیست .

۱۲۴ . ثابت کنید که بی‌نهایت عدد اول q وجود دارد ، بنحوی که به‌ازای عدد طبیعی $n<q$ ، عدد $(n-1)!+1$ بر q قابل قسمت باشد.

۱۲۵* . ثابت کنید که برای هر عدد صحیح $k\neq 1$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که عدد $2^{2^n}+k$ مرکب باشد .

۱۲۶ . ثابت کنید که بی‌نهایت عدد فرد $k>0$ وجود دارد ، بنحوی که به‌ازای آنها همهٔ عددهای $k+2^{2^n}$ $(n=1,2,\dots)$ مرکب باشند .

۱۲۷ . ثابت کنید که همهٔ عددهای $3+2^{2^{4n+1}}$ ، $7+2^{2^{2n+1}}$ ، $13+2^{2^{6n+2}}$ ، $19+2^{2^{10n+1}}$ و $21+2^{2^{6n+2}}$ $(n=1,2,\dots)$ مرکب هستند .

۱۲۸* . ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی که عددهای $k\cdot 2^n+1$ $(n=1,2,\dots)$ مرکب باشند .

۱۲۹* . براساس حل مسئلهٔ ۱۲۸ ، قضیهٔ **اردیوش** را ثابت کنید مبنی براینکه بی‌نهایت عدد فرد طبیعی k وجود دارد که به‌ازای هر یك از آنها ، عددهای $k+2^n$ $(n=1,2,\dots)$ مرکب‌اند .

۱۳۰ . اگر k توانی از عدد ۲ با نمای طبیعی باشد ، ثابت کنید به‌ازای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ n ، همهٔ عددهای $k\cdot 2^n+1$ مرکب‌اند .

۱۳۱ . وقتی که عدد طبیعی k کوچکتر یا مساوی ۱۰ باشد ، کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که به‌ازای آن $k\cdot 2^n+1$ عددی مرکب باشد .

۱۳۲ . همهٔ عددهای طبیعی $k\leqslant 10$ را چنان پیدا کنید که به‌ازای آنها ، هر یك از عددهای $k\cdot 2^n+1$ $(n=1,2,\dots)$ مرکب باشند .

۱۳۳ . ثابت کنید که برای عددهای طبیعی $n>1$ ، همهٔ عددهای $\frac{1}{3}(2^{2^n}+2^{2^{n+1}}+1)$ مرکب‌اند .

۱۳۴ . ثابت کنید که بین عددهای 2^2+1 و $(2^{2^n}+1)^2$ ، وقتی $n=1,2,\dots$ باشد ، بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد .

*۱۳۵ . ثابت کنید که به‌ازای عددهای طبیعی $a \leqslant ۱۰۰$ ، $a > ۱$ ، لااقل یك عدد طبیعی $n \leqslant ۶$ وجود دارد ، بنحوی که عدد $a^{۲^n} + ۱$ مرکب باشد .

۱۳۶ . ثابت کنید که بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد ، بطوریکه **مساوی مجموع سه‌عدد اول مختلف باشد، ولی مجموع کمتر از سه عدد اول نباشند.**

۱۳۷ . ثابت کنید که کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود ندارد ، بنحوی که $f(۱) = ۲$ ، $f(۲) = ۳$ ، $f(۳) = ۵$ باشد. ولی ، وقتی $m > ۱$ باشد، کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب گویا وجود دارد، بنحوی‌که $f(k) = p_k$ باشد ؛ $k = ۱, ۲, \cdots, m$ و p_k ، k امین عدد اول است .

*۱۳۸ . از حالت خاص قضیهٔ دیریکله ـ برای هر عدد طبیعی m ، در تصاعد حسابی $mk + ۱ (k = ۱, ۲, \cdots)$ ، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد ـ نتیجه بگیرید که برای هر عدد طبیعی n، کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد بنحوی‌که $f(۱) < f(۲) < \cdots < f(n)$ باشد و ضمناً همهٔ این عددها ، اول باشند .

۱۳۹ . مثالی برای کثیرالجملهٔ $f(x)$ (با ضرایب صحیح) بدهید که به‌ازای m مقدار مختلف طبیعی x، m عدد مختلف اول بدست آید.

۱۴۰ . ثابت کنید که اگر $f(x)$ ، کثیرالجمله‌ای با درجهٔ مثبت و ضرایب صحیح باشد ، همنهشتی $f(x) = ۰ \pmod p$ برای بی‌نهایت عدد اول p ، جواب دارد .

۱۴۱ . ثابت کنید به‌ازای عددهای طبیعی n . برای اینکه عدد $۲^n + ۱$ اول باشد ، نه‌لازم و نه‌کافی است که عدد $۲^{۲^n} + ۱$ اول باشد .

۵. معادلات دیوفانتی (سیال)

۱۴۲ . ثابت‌کنیدکه‌معادلهٔ $3x^2-7y^2+1=0$ ، بی‌نهایت‌جواب برای عددهای طبیعی xوy دارد .

۱۴۳ . تمام جوابهای صحیح معادلهٔ زیرا پیداکنید :

$$2x^2+xy-7=0$$

و ثابت‌کنیدکه اگر xوy عددهای مثبت و گویائی باشند ، ایـن معادله بی‌نهایت جواب دارد .

۱۴۴ . اگر mو n دو عدد طبیعی باشند ، ثابت‌کنید معادلهٔ خطی $ax+by=c$ $(a,b$وc عددهای صحیح‌اند) وجود دارد، بنحوی‌که برای عددهای طبیعی xوy تنها یك جواب ؛ $x=m$و$y=n$ را داشته‌باشد .

۱۴۵ . ثابت‌کنیدکه همیشه معادلهٔ خطی $ax+by=c$ $(a,b$وc عددهای‌صحیح‌اند) وجود دارد ، بنحوی‌که درست m جواب‌طبیعی برای xوy داشته باشد (m عدد طبیعی دلخواهی است) .

۱۴۶ . ثابت‌کنید ، معادلهٔ

$x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1=0$ (m عددی‌طبیعی‌است)، درست m جواب برای عددهای طبیعی xوy دارد .

۱۴۷ . ثابت‌کنیدکه معادلهٔ

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1$$

بی‌نهایت جواب طبیعی برای xوy دارد .

۱۴۸ . تمام جوابهای صحیح x را برای معادلهٔ زیر پیدا کنید

$$x^۳+(x+۱)^۳+(x+۲)^۳=(x+۳)^۳$$

۱۴۹ . ثابت‌کنید برای هر عدد طبیعی n ، معادلهٔ

$$(x+۱)^۳+(x+۲)^۳+\cdots+(x+n)^۳=y^۳$$

دارای جوابهای صحیح برای xوy می‌باشد .

۱۵۰ . همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را پیداکنید :

$$(x+۱)^۳+(x+۲)^۳+(x+۳)^۳+(x+۴)^۳=(x+۵)^۳$$

۱۵۱ . همهٔ جوابهای‌گویای معادلهٔ زیر را پیداکنید :

$$(x+۱)^۳+(x+۲)^۳+(x+۳)^۳+(x+۴)^۳=(x+۱۰)^۳$$

۱۵۲ . ثابت‌کنید ، معادلهٔ

$$x(x+۱)=۴y(y+۱)$$

برای xوy جواب طبیعی ندارد ، ولی بی‌نهایت جواب مثبت‌گویا برای xوy دارد .

۱۵۳ . ثابت کنید که برای هر عدد صحیح و مفروض n ، معادلهٔ $n=x^۲+y^۲-z^۲$ ، بی‌نهایت جواب بزرگتر از واحد برای عددهای صحیح x، y و z دارد .

۱۵۴ . اگر mوn عددهای طبیعی باشند ، همهٔ جوابهای معادلهٔ $۱=۳^n-۲^m$ را پیداکنید .

۱۵۵ . اگر mوn عددهای‌طبیعی‌باشند،همهٔ‌جوابهای $۱=۲^m-۳^n$ را پیداکنید .

۱۵۶ . ثابت‌کنیدکه دستگاه معادلات

$$۲x^۲+y^۲=t^۲ \ ، \ x^۲+۲y^۲=z^۲$$

برای عددهای طبیعی $x، y، z$ و t جواب ندارد.

۱۵۷ . با توجه به اتحاد

$$[۲(۳x+۲y+۱)+۱]^۲-۲(۴x+۳y+۲)^۲=(۲x+۱)^۲-۲y^۲$$

ثابت‌کنیدکه معادلهٔ $x^۲+(x+۱)^۲=y^۲$ ، برای عددهای طبیعی x و y، بی‌نهایت جواب دارد.

۱۵۸ . با توجه به‌اتحاد

$$[۲(۷y+۱۲x+۶)]^۲-۳[۲(۴y+۷x+۳)+۱]^۲=$$
$$=(۲y)^۲-۳(۲x+۱)^۲$$

ثابت‌کنیدکه معادلهٔ $(x+۱)^۳-x^۳=y^۲$ ، برای عددهای طبیعی x و y، بی‌نهایت جواب دارد.

۱۵۹ . اگر $x، y، z$ و t عددهائی طبیعی باشند ، ثابت‌کنید دستگاه دو معادلهٔ $x^۲+۵y^۲=z^۲$ ، $۵x^۲+y^۲=t^۲$ جواب ندارد.

۱۶۰ . ثابت کنید که دستگاه دو معادلهٔ $x^۲+۶y^۲=z^۲$ ، $۶x^۲+y^۲=t^۲$ ، برای‌عددهای طبیعی $x، y، z$ و t ، دارای‌جواب‌نیست.

۱۶۱ . ثابت کنید که دستگاه دو معادلهٔ $x^۲+۷y^۲=z^۲$ ، $۷x^۲+y^۲=t^۲$ ، برای عددهای طبیعی $x، y، z$ و t ، جواب دارد.

۱۶۲ . قضیهٔ **له‌بك** رادراین‌باره‌ثابت‌کنیدکه معادلهٔ $x^۲=y^۳=۷$ برای عددهای طبیعی x و y جواب ندارد.

۱۶۳ . اگر c عدد طبیعی فردی باشد ، ثابت کنید معادلهٔ $x^۲-y^۳=(۲c)^۳-۱$ ، برای عددهای **صحیح** x و y جواب ندارد.

۱۶۴ . قضیهٔ **میسنر** : مطلوبست همهٔ جوابهای طبیعی x، y، z و t از دستگاه دو معادلهٔ $x+y=zt$ ، $z+t=xy$ ($x\leqslant y$ ، $x\leqslant z\leqslant t$) . ثابت کنید این دستگاه دارای بی‌نهایت جواب برای عددهای صحیح x، y، z و t است .

۱۶۵ . ثابت کنید که برای عددهای x_1، x_2، ... و x_n (n عددی است طبیعی) ، معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$ ، لااقل یك دستگاه جواب دارد .

۱۶۶ . برای هر دو عدد طبیعی و مفروض a و n ، روش پیدا کردن همهٔ جوابهای معادلهٔ $x^n-y^n=a$ را ، بـرای عددهـای طبیعی x و y ، شرح دهید .

۱۶۷* . اگر p عددی اول و n عددی طبیعی باشد ، ثـابت کنید معادلهٔ

$$x(x+1)=p^{2n}.y(y+1)$$

برای عددهای طبیعی x و y جواب ندارد .

۱۶۸ . دو جواب از عددهای طبیعی x و y را در معادلهٔ زیر پیدا کنید :

$$y(y+1)=x(x+1)(x+2)$$

۱۶۹ . با در دست داشتن جوابهای صحیح x و y در معادلهٔ $x^2-2y^2=k$ (k عدد صحیح مفروضی است) ، مطلوبست جوابهای صحیح u و v از معادلهٔ $v^2-2u^2=-k$.

۱۷۰ . a) ثابت کنید معادلهٔ

$$x^2 - Dy^2 = z^2$$

برای هر عدد صحیح D ، بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x، y و z دارد .

b) ثابت کنید معادلهٔ $z^2 = y^2 + x^2 + 1$، برای عددهای طبیعی x، y و z بی‌نهایت جواب دارد .

۱۷۱ . ثابت‌کنیدکه معادلهٔ

$$xy + x + y = 2^{32}$$

وقتی‌که $x \leqslant y$ باشد ، برای عددهای x و y ، تنها یك جواب دارد .

۱۷۲ . ثابت‌کنید که برای عددهای صحیح x، y و z ، معادلهٔ زیر جواب ندارد :

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3$$

۱۷۳ . همهٔ جوابهای طبیعی x و y را از معادلهٔ زیر پیداکنید :

$$y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$$

۱۷۴ . همهٔ جوابهای گویای x، y و z را از معادلهٔ زیر بدست آورید :

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$$

۱۷۵ . قضیهٔ **اولر** : ثابت‌کنید معادلهٔ

$$4xy - x - y = z^2$$

برای عددهای طبیعی x، y و z جواب ندارد [۳] ؛ و ثابت‌کنیدکه این معادله برای عددهای صحیح و منفی x، y و z بی‌نهایت جواب دارد .

۱۷۶ . ثابت کنید که اگر $D=m^2+1$ و m عددی طبیعی باشد ، معادلهٔ

$$x^2-Dy^2=1$$

بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد .

۱۷۷* . همهٔ جوابهای صحیح x و y را برای معادلهٔ زیر بدست آورید :

$$y^2=x^3+(x+4)^2$$

۱۷۸ . برای هر عدد طبیعی m ، همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m$$

را برای عددهای صحیح x و y و z بدست آورید ، بشرطی که x، y و z مخالف صفر و دو به‌دو نسبت بهم اول باشند .

۱۷۹ . ثابت کنید که معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$$

برای عددهای طبیعی x، y و z ، جواب ندارد .

۱۸۰* . ثابت کنید که معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$$

برای عددهای طبیعی x، y و z ، جواب ندارد .

۱۸۱ . همهٔ جوابهای طبیعی x، y و z را از معادلهٔ زیر بدست

آورید :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۳$$

۱۸۲* . ثابت‌کنید به‌ازای $m=۱$ و $m=۲$ ، معادلهٔ

$$x^۳+y^۳+z^۳=mxyz$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد و در حالت $m=۳$ همهٔ جوابهای طبیعی معادله را پیداکنید .

۱۸۳ . ثابت کنید قضیهٔ $T_۱$ ، که طبق آن برای عددهای طبیعی x ، y و z ، معادلهٔ $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ جواب ندارد ، هم‌ارز یا قضیهٔ $T_۲$ است که‌طبق‌آن معادلهٔ $u^۳+v^۳=w^۳$ برای عددهای‌طبیعی u ، v ، w جواب ندارد (به‌این معنا که از هر یك ازقضیه‌های $T_۱$ و $T_۲$ می‌توان دیگری را نتیجه‌گرفت) .

۱۸۴* . ثابت‌کنیدکه معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=۱$$

برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب ندارد . ولی‌دارای‌بی‌نهایت‌جواب صحیح مخالف صفر است .

۱۸۵* . ثابت‌کنیدکه معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m$$

به‌ازای $m=۲$ و $m=۳$ ، برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t ، جواب ندارد ، و همهٔ جوابهای طبیعی معادله را برای x ، y ، z و t به ازای $m=۴$ پیداکنید .

۱۸۶ . اگر $x<y<z<t$ عددهای طبیعی باشند، همهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را پیداکنید :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$$

۱۸۷ . ثابت‌کنیدکه برای هر عدد طبیعی s ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ، تعداد محدودی جواب دارد .

۱۸۸* . ثابت‌کنیدکه برای عدد طبیعی $s>2$ ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

برای عددهای طبیعی وصعودی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ دارای جواب است ؛ اگر همهٔ اینگونه جوابها را به l_s نشان دهیم ، برای $s=3,4,\ldots$ ، نامساوی $l_{s+1}>l_s$ برقرار است .

۱۸۹ . ثابت‌کنیدکه اگر s عدد طبیعی مخالف ۲ باشد ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

برای عددهای مثلثی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (یعنی عددهای به صورت $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، n عددی طبیعی) ، جواب دارد .

۱۹۰ . ثابت‌کنیدکه برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان عدد $\frac{1}{n}$ را به صورت مجموع n عدد معکوس عددهای مثلثی مختلف نوشت.

۱۹۱ . همه جوابهای معادلهٔ زیر را برای عددهای طبیعی x، y، z و t پیدا کنید :

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}+\frac{۱}{z^۲}+\frac{۱}{t^۲}=۱$$

۱۹۲ . عددهای طبیعی s را چنان پیدا کنید که معادلهٔ

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_s^۲}=۱$$

لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_s داشته باشد .

۱۹۳ . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $s>۱$، معادلهٔ

$$\frac{۱}{x_۰^۲}=\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_s^۲}$$

برای عددهای طبیعی $x_s>\cdots>x_۱>x_۰$ جواب دارد .

۱۹۴ . ثابت کنید که عدد ۱ را نمی‌شود به‌صورت مجموع محدودی از مربع معکوسات عددهای مختلف طبیعی نوشت، بطوریکه تعداد آنها بیشتر از واحد باشد .

۱۹۵ . عدد $\frac{۱}{۲}$ را به مجموع محدودی از مربع معکوسات عددهای طبیعی تبدیل کنید .

۱۹۶* . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، وقتی که s به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، معادلهٔ

$$\frac{۱}{x_۱^m}+\frac{۱}{x_۲^m}+\cdots+\frac{۱}{x_s^m}=۱$$

لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ دارد .

۱۹۷ . ثابت کنیدکه برای هر عدد طبیعی s ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_s^2}=\frac{1}{x_{s+1}^2}$$

برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ و x_{s+1} دارای بی‌نهایت جواب است .

۱۹۸ . ثابت‌کنیدکه برای هر عدد طبیعی $s \geqslant 3$ ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\cdots+\frac{1}{x_s^3}=\frac{1}{x_{s+1}^3}$$

برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ و x_{s+1} بی‌نهایت جواب دارد .

۱۹۹* . جوابهای‌صحیح x, y و z را ازدستگاه‌دومعادلهٔ زیر بدست آورید :

$$x+y+z=3 \quad , \quad x^3+y^3+z^3=3$$

۲۰۰ . تحقیق‌کنید به‌ازای چه مقادیرطبیعی عدد n ، معادلهٔ

$$3x+5y=n$$

لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد . ثابت کنیدکه تعداد این‌جوابها همراه با n ، بطور نامحدود صعودی‌است .

۲۰۱ . a) همهٔ جوابهای طبیعی x, n ، y و z را در معادلهٔ زیر پیداکنید :

$$n^x+n^y=n^z$$

b) همهٔ جوابهای طبیعی x، y، z و t را در معادلهٔ زیر پیدا کنید :

$$n^x+n^y+n^z=n^t$$

c) همهٔ جوابهای طبیعی x، y، z و t را از معادلهٔ زیر بدست آورید :

$$۴^x+۴^y+۴^z=۴^t$$

۶. مسائل مختلف

۲۰۲ . ثابت کنید که اگر بتوان عدد صحیح k را به صورت $k=x^۲-۲y^۲$ (x و y عددهائی طبیعی‌اند) نوشت ، می‌توان آنرا به بی‌نهایت طریق به‌اینصورت نوشت .

۲۰۳ . اگر k ، y و x عددهائی صحیح باشند ، ثابت‌کنیدکه هر عدد به صورت $۸k+۳$ یا $۸k+۵$ را نمی توان به صورت $x^۲-۲y^۲$ نوشت .

۲۰۴ . ثابت کنید در بین عددهای $۸k+۱$ ($k=۰,۱,۲,\cdots$) بی‌نهایت‌عدد وجود داردکه به‌صورت $x^۲-۲y^۲$ (x و y اعدادی‌صحیح‌اند) نوشته‌شوند و بی‌نهایت عدد وجود داردکه به‌اینصورت‌قابل تبدیل‌نباشند . کوچکترین عدد نوع اخیر را پیداکنید .

۲۰۵ . ثابت‌کنیدکه آخرین رقم عددکامل زوج (در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده) ، همیشه یا ۶ است یا ۸ .

۲۰۶ . ثابت‌کنیدکه اگر درصورت‌ومخرج کسر $\frac{۱۰۱۰۱۰۱۰۱}{۱۱۰۰۱۰۰۱۱}$، که در دستگاه عددشماری به‌مبنای دلخواه g (g عددی است‌طبیعی و بزرگتر

از واحد) نوشته شده است ، بجای رقم وسط ۱ (رقم پنجم) ، به تعداد فرد ، ولی دلخواه عدد ۱ قرار دهیم ، مقدار آن تغییر نمی‌کند :

$$\frac{101010101}{110010011} = \frac{10101110101}{11001110011} = \frac{1010111110101}{1100111110011} = \ldots$$

۲۰۷ . ثابت‌کنید که مجموع رقمهای عدد 2^n (که در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده نوشته شده‌است) ، همراه با n صعودی است.

۲۰۸ . k عددطبیعی‌دلخواهی‌بزرگتر‌ازواحد و c رقم‌دلخواهی‌از دستگاه‌عددشماری به‌مبنای ده‌است. ثابت‌کنید عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که k امین رقم از آخر در بسط عدد 2^n ، رقم c باشد .

۲۰۹ . ثابت‌کنید ، چهار رقم‌آخر عددهای $5^n (n=1,2,3,\ldots)$ یك دنبالهٔ متناوب را تشکیل مـی‌دهند ، دورهٔ تناوب را تعیین کنید و روشن‌کنید که آیا این دنبالهٔ متناوب خالص است یا نه [۴] .

۲۱۰ . ثابت‌کنید ، برای هر عدد طبیعی s ، s رقم اول بسط یك عدد مجذورکامل در دستگاه به‌مبنای ده ، می‌تواند دلخواه باشد .

۲۱۱ . ثابت‌کنید ، رقمهای آخر عددهای $n^{n^n} (n=1,2,3,\ldots)$ در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده ، از یك دنبالهٔ متناوب تشکیل شده است ، دورهٔ تناوب را پیداکنید و تحقیق‌کنید که آیا خالص است .

۲۱۲ . ثابت کنید ، در هر کسر اعشاری نامحدود ، دنبالـه‌ای از ارقام اعشاری بطول دلخواه وجود دارد ،که بی‌نهایت مرتبه تکرار شده است .

۲۱۳ . a) برای‌هرعددطبیعی k ، عدد 3^{2k} را به‌صورت 3^k جمله بنویسید بطوری که دنباله‌ای از اعداد طبیعی را تشکیل دهند .

b) ثابت کنید که هیچیك ازعددهای فرما ، $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ (n عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است) ، نمی‌توانند به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشته‌شوند.

۲۱۴ . ثابت‌کنید ، برای هر عدد طبیعی $s > ۱$ ، عدد طبیعی m_s وجود دارد، بنحوی که برای عدد طبیعی $n \geqslant m_s$ ، بین n و ۲n لااقل یك توان s ام عدد طبیعی وجود داشته باشد . کوچکترین عدد m_s را برای $s = ۲$ و $s = ۳$ پیداکنید .

۲۱۵ . ثابت‌کنید که دنباله‌ای بطول دلخواه ، از عددهای طبیعی متوالی وجود دارد ، بطوری‌که هیچیك از آنها توانی از یك عددطبیعی با نمای بزرگتر از واحد نباشد .

۲۱۶ . مطلوبست بیان جملهٔ n ام‌ازدنبالهٔ‌نامحدود u_n $(n = ۱,۲,\dots)$ که با شرایط زیر معین می‌شود :

$$u_۱ = ۱, u_۲ = ۳, u_{n+۲} = ۴u_{n+۱} - ۳u_n (n = ۱,۲,\dots)$$

۲۱۷ . مطلوبست بیان جملهٔ n ام از دنبالهٔ نامحدودی که با شرایطزیرمعین‌شده است : $u_{n+۲} = ۲u_{n+۱} - u_n$ ، $u_۲ = b$ ، $u_۱ = a$ (برای $n = ۱,۲,\dots$) .

۲۱۸ . جملهٔ n ام ازدنبالهٔ نامحدودی را پیدا کنیدکه باشرایط زیر معین می‌شود : $u_{n+۲} = -(u_n + ۲u_{n+۱})$ ، $u_۲ = b$ ، $u_۱ = a$ (برای $n = ۱,۲,\dots$) . حالتهای خاص $a = ۱$ و $b = -۱$ ، $a = ۱$ و $b = -۲$ را بحث‌کنید .

۲۱۹ . مطلوبست جملهٔ n ام ازیك دنبالهٔ نامحدود ، با شرایط : $u_۱ = a$ ، $u_۲ = b$ ، $u_{n+۲} = ۲u_n + u_{n+۱}$.

۲۲۰ . همهٔ عددهای صحیح $a \neq 0$ را طوری پیدا کنیدکه برای $n = 1,2,3,\ldots$ دارای خاصیت $a^{a^n} = a$ باشند .

۲۲۱* . روش بدست آوردن همهٔ زوج عددهای طبیعی را نشان دهید ، بطوریکه هم‌مجموع وهم حاصلضرب آنها مجذور یك عددطبیعی باشند . همهٔ جوابهای کوچکتر از ۱۰۰ را پیداکنید .

۲۲۲ . مطلوبست همهٔ جمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی که‌مجذور یامکعب یك عدد طبیعی بوده وکوچکتر از ۱۰۰۰۰ باشند .

۲۲۳* . ثابت‌کنیدکه هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت‌مجموع جمله‌های مختلف دنبالهٔ فیبوناچی نوشت .

۲۲۴ . ثابت کنید که برای جملهٔ u_n از دنبالهٔ فیبوناچی $(n = 2,3,\ldots)$ ، رابطهٔ $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n-1}$ برقراراست.

۲۲۵ . ثابت‌کنیدکه هر عدد صحیح را می‌توان به صورت مجموع پنج مکعب عددهای صحیح به‌بی‌نهایت طریق نوشت .

۲۲۶ . ثابت‌کنیدکه‌عدد ۳ را به‌بی‌نهایت طریق می‌توان به‌صورت مجموع چهار مکعب عدد صحیح (غیر از صفر و واحد) نوشت .

۲۲۷ . ثابت‌کنید ، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که لااقل به دوطریق بتوان آنها را به مجموع چهار مربع‌کامل تبدیل کرد . همین مسئله را درمورد تبدیل به‌مجموع‌چهار مکعب هم حل‌کنید.

۲۲۸ . ثابت‌کنیدکه به‌ازای‌همهٔ‌عددهای طبیعی m ، در هر تبدیل عدد $۴^m.۷$ به‌مجموع چهارمربع عددهای صحیح غیر منفی ، هر یك از این عددها بزرگتر یا مساوی ۲^{m-1} است .

۲۲۹ . کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از ۲ را پیدا کنید که هم

مجموع مربعهای دو عدد طبیعی وهم مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی باشد . ثابت‌کنیدکه بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد ، بنحوی‌که بتوان هر یك ازآنها را هم به‌مجموع مربعها و هم به‌مجموع مکعبهای دوعدد طبیعی و نسبت بهم اول ، تبدیل کرد .

۲۳۰ . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد طبیعی $n>۲$ وجود دارد، بنحوی‌که برای $k=۱,۲,\dots,n$ مساوی مجموع دوتوانkام عددهای طبیعی باشد .

۲۳۱ * . ثابت‌کنیدکه بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نیست ، ولی‌مساوی مجموع مکعبهای دو عدد مثبت‌گویا می‌باشد .

۲۳۲ * . ثابت‌کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود داردکه می‌توانند به‌صورت تفاضل مکعبهای دو عدد طبیعی نوشته شود ، ولی نمی توانند به‌صورت مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی تبدیل شوند .

۲۳۳ * **. ثابت کنید ، برای هرعدد طبیعی $k>۱$ و $k\neq ۳$، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد، بنحوی‌که مساوی مجموع توانهای kام دو عدد طبیعی باشند، ولی مساوی تفاضل توانهای kام دوعدد طبیعی نباشند.**

۲۳۴ . مطلوبست‌کوچکترین عدد طبیعی $n>۱$ ، که به‌ازای آن مجموع‌مربعهای عددهای طبیعی متوالی از ۱ تا n ، مساوی‌مربع یك عدد طبیعی باشد .

۲۳۵ . a) هر عدد به‌صورت a^b را ، توان صحیح می‌نامیم(a و b عددهای طبیعی بزرگتر از واحدند) . مطلوبست همهٔ عددهای طبیعی که به صورت مجموع تعداد محدودی (بزرگتر یا مساوی واحد) از توانهای صحیح باشد .

b) ثابت کنید که هر عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰ و مخالف ۶ را می‌توان به‌صورت تفاضل دو توان صحیح نوشت .

۲۳۶ . ثابت کنید، برای هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن عددهای طبیعی هستند و برای هر عدد طبیعی n ، مثلثی متشابه با آن وجود دارد ، بطوریکه هر یك از اضلاع آن به‌صورت توانی از یك عدد طبیعی با نمای بزرگتر یا مساوی n باشد .

۲۳۷ . مطلوبست همهٔ عددهای طبیعی $n>1$ ، که به ازای آنها $(n-1)!+1=n^2$ باشد .

۲۳۸ . ثابت کنید که حاصلضرب دو عدد مثلثی متوالی نمی‌تواند مربع کامل باشد ، ولی برای هر عدد مثلثی $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، بی‌نهایت عدد مثلثی t_m وجود دارد ، بنحوی که عدد $t_m \cdot t_n$ مربع کامل باشد .

۲۳۹ . بدون استفاده از جدولهای لگاریتم ، ثابت کنید عدد $F_{1945}=2^{2^{1945}}+1$ بیش از 10^{582} رقم دارد. تعداد رقمهای $5.2^{1947}+1$ را پیدا کنید (این عدد کوچکترین مقسوم‌علیه اول عدد F_{1945} است) .

۲۴۰ . تعداد رقمهای عدد $2^{11213}-1$ را، در دستگاه عددشماری به‌مبنای ده، پیدا کنید(این عدد ، بزرگترین عدد اولی است که تا امروز شناخته شده است) .

۲۴۱ . تعداد رقمهای عدد $(2^{11213}-1)^{11212}$ را، در دستگاه عددشماری به‌مبنای ده، پیدا کنید(این عدد ، بزرگترین عدد کاملی است که تا امروز شناخته شده است) .

۲۴۲ . ثابت کنید که عدد $!!!3$ در دستگاه عدد شماری به مبنای

ده، بیش ازهزاررقم دارد.حساب‌کنید، این عدد به‌چند صفرختم‌شده‌است.

۲۴۳ * . تحقیق کنید، به‌ازاءچه‌مقادیرطبیعی $m>1$، کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد ، بنحوی‌که درتقسیم بر m به ازای یك مقدارصحیح x باقیمانده‌ای مساوی صفر وبه‌ازای بقیهٔ مقادیرصحیح x ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ بدست آید .

۲۴۴ . عدد $\sqrt{D}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل‌کنید ، بشرطی‌که

$$D=[(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1$$

و m و n عددهائی طبیعی باشند .

۲۴۵ . مطلوبست همهٔ عددهای طبیعی $n<30$ ، کـه بـرای آنها $\varphi(n)=d(n)$ باشد؛ $\varphi(n)$ تابع اولرو $d(n)$ تعدادمقسوم‌علیه‌های‌طبیعی عدد n است .

۲۴۶ . ثابت‌کنیدکه‌برای‌هرعددطبیعی g،می‌توان‌عددگویای $w>1$ را بصورت

$$w=(1+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{k+1})\cdots(1+\frac{1}{k+s})$$

نشان داد ، که در آن k عدد طبیعی بزرگتر از g و s عدد صحیح غیر منفی است .

۲۴۷ * . قضیهٔ **اردیوش** و **شوران** را ثابت کنید : هر عددصحیح k را می‌توان به‌بی‌نهایت طریق به‌صورت $k=\pm 1^2\pm 2^2\pm\cdots\pm m^2$ نشان داد ،که در آن m عددی طبیعی است و علامت «$\pm$» می‌تواند به وضع مناسبی اختیار شود .

۲۴۸ . a) واضح است‌که اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح و $f(x)=0$ دارای ریشه‌های صحیح باشد، همنهشتی $f(x)\equiv 0 \pmod p$

برای هر عدد اول مدول p دارای جواب است. روی مثال معادلهٔ درجهٔ اول $ax+b=0$ ثابت کنید که عکس این قضیه صحیح نیست.

b) ثابت کنید که اگر همنهشتی $ax+b\equiv 0 \pmod m$ (a و b عددهای صحیح‌اند)، برای هرمقدار طبیعی مدول m جواب داشته باشد، معادله $ax+b=0$ دارای ریشهٔ صحیح است.

۲۴۹. ثابت کنید همنهشتی $6x^2+5x+1\equiv 0 \pmod m$، برای هر مدول طبیعی m دارای جواب است، باوجودی که معادلهٔ $6x^2+5x+1=0$ دارای جواب صحیح نیست.

۲۵۰. a) قضیهٔ **فرما** را ثابت کنید: اگر p عددی اول باشد، هر مقسوم‌علیه اول مخالف ۳ از عدد 2^p+1 به‌صورت $2kp+1$ است، که در آن k عددی است طبیعی.

b) ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که هم‌مساوی مجموع دو عدد مثلثی (یعنی عددی بصورت $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ و $n=1,2,\ldots$) و هم مساوی مجموع مربعهای دو عدد طبیعی باشند.

c) ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع دو عدد مثلثی هستند، ولی نمی‌توانند بصورت مجموع مربعهای دوعدد طبیعی درآیند.

d) ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع مربعهای دو عدد طبیعی باشند، ولی نمی‌توانند بصورت مجموع دو عدد مثلثی درآیند.

e) ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توانند

نه‌مساوی مجموع دو عدد مثلثی و نه مساوی مجموع مربعهای دو عدد طبیعی باشد .

f) همهٔ جوابهای صحیح x و y را از معادلهٔ زیر بدست آورید :

$$x^۲+(x+۱)^۲=y^۴$$

۱ - قابلیت تقسیم اعداد

۱. تنها یك عدد طبیعی $n=۱$ در این مورد وجود دارد . زیرا چون $n^۲+۱=n(n+۱)-(n-۱)$ است ، برای اینکه $n^۲+۱$ بر $n+۱$ قابل قسمت باشد ، باید $n-۱$ بر $n+۱$ قابل قسمت شودکه تنها وقتی ممکن است‌که $n-۱=۰$ یعنی $n=۱$ باشد .

۲. فرض‌کنید $x-۳=t$ ، عددی صحیح و مخالف صفر چنان باشدکه $(t+۳)^۳-۳$ بر t قابل قسمت شود . این شرط هم‌ارز با این

حکم است که $۳-۳^۳$ یعنی ۲۴ بر t قابل قسمت شود. بنابراین لازم و کافی است که t مقسوم‌علیه صحیحی از عدد ۲۴ باشد، یعنی عددهای ±۱، ±۲، ±۳، ±۴، ±۶، ±۸، ±۱۲، ±۲۴، درا ینصورت برای $x=t+۳$ مقادیر زیر بدست می‌آید: -۲۱، -۹، -۵، -۳، -۱، ۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۵ و ۲۷.

۳. مربع یك عدد صحیح، در حالتی‌که بر ۷ قابل قسمت نباشد، در تقسیم بر آن باقیمانده‌ای مساوی ۱، ۲ یا ۴ می‌دهد. به این ترتیب مجموع دو مربع کامل، در تقسیم بر ۷، یکی از باقیمانده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهد داد. بنابراین اگر دو عدد صحیح a و b چنان‌باشند که $a^۲+b^۲$ بر ۷ قابل قسمت باشد، یکی از آنها ودر نتیجه دیگری هم باید مضربی از ۷ باشد.

۴. مثلا، همهٔ عددهای طبیعی n، که در تشکیل تصاعد حسابی $۶۵k+۵۶$ $(k=۰,۱,۲,\dots)$ دخالت دارند، دارای این خاصیت‌هستند؛ زیرا اگر $n=۶۵k+۵۶$ باشد، وقتی‌که $k\geqslant ۰$ است، داریم:

$$n\equiv \pmod ۵ \quad ; \quad n\equiv ۴ \pmod{۱۳}$$

و از آنجا

$$۴n^۲+۱\equiv ۰ \pmod ۵ \quad ; \quad ۴n^۲+۱\equiv ۰ \pmod{۱۳}$$

یعنی $۴n^۲+۱$ بر ۵ و ۱۳ قابل قسمت است.

۵. اثبات را به‌کمك‌استقراءریاضی انجام می‌دهیم. به‌ازای $n=۱$ داریم:

$$۳^{۳n+۳}-۲۶n-۲۷=۳^{۶}-۲۶-۲۷=۶۷۶=۴\times ۱۶۹$$

سپس داریم :

$$۳^{۳(n+۱)+۳}-۲۶(n+۱)-۲۷-(۳^{۳n+۳}-۲۶n-۲۷)=$$
$$=۲۶(۳^{۳n+۳}-۱)$$

ولی $(۱-۳^{۳})$ بر ۱۳ قابل قسمت است ، از آنجا $۱-۳^{۳(n+۱)}$ بر ۱۳ قابل قسمت می‌شود و بنابراین $۲۶(۳^{۳n+۳}-۱)$ بر ۱۶۹ قابل قسمت خواهد بود .

۶۰ چون‌داریم: $۲^{۶}=۶۴\equiv ۱(\mathrm{mod}۹)$ ، به‌ازای $k=۰,۱,۲,\ldots$ داریم : $۲^{۶k}\equiv ۱(\mathrm{mod}۹)$ وازآنجا : $۲^{۶k+۲}\equiv ۴(\mathrm{mod}۹)$ ؛ چون هر دوطرف‌همنهشتی‌اعدادزوج‌هستند، بدست‌می‌آید: $۲^{۶k+۲}\equiv ۴(\mathrm{mod}۱۸)$ به‌این ترتیب $۲^{۶k+۲}=۱۸t+۴$ (t عددی صحیح بزرگتر یا مساوی صفر) می‌شود . از طرف دیگر ، با توجه به قضیهٔ کوچك‌فرما داریم : $۲^{۱۸}\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۹)$ ، از آنجا برای $t=۰,۱,۲,\ldots$ بدست می‌آید : $۲^{۱۸t}\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۹)$ و بنابراین : $۲^{۱۸t+۴}\equiv ۲^{۴}(\mathrm{mod}۱۹)$ $=۲^{۶k+۲}$ وازآنجا : $۲^{۶k+۲}+۳\equiv ۲^{۴}+۳\equiv ۰(\mathrm{mod}۱۹)$ می‌شود .

۷۰ براساس قضیهٔ کوچك فرما داریم :

$$۲^{۱۲}\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۳) \Longrightarrow ۲^{۶۰}\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۳)$$

از طرف دیگر داریم :

$$۲^{۵}\equiv ۶(\mathrm{mod}۱۳) \Longrightarrow ۲^{۱۰}\equiv -۳(\mathrm{mod}۱۳)$$

وبنابراین خواهیم‌داشت: $۲^{۷۰} \equiv -۳ (\mathrm{mod}\, ۱۳)$. از طرف دیگرداریم:

$$۳^{۳} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۱۳) \Longrightarrow ۳^{۶۹} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۱۳) \Longrightarrow ۳^{۷۰} \equiv ۳ (\mathrm{mod}\, ۱۳)$$

وبنابراین $۲^{۷۰} + ۳^{۷۰} \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۱۳)$ می‌شود یعنی $۲^{۷۰} + ۳^{۷۰}$ بر ۱۳ قابل قسمت است .

۸ . به کمك روش استقراء ریاضی ، می‌توان بسادگی ثابت‌کردکه برای عددهای طبیعی n داریم : $۲^{n} \geqslant n+۱$ ، ازآنجا نتیجه می‌شودکه $۲^{۲^{n}}$ بر $۲^{n+۱}$ قابل قسمت است و درنتیجه $۲^{۲^{n}} - ۱$ بر $۲^{۲^{n+۱}} - ۱$ قابل قسمت می‌شود . بنابراین با توجه به‌اینکه $F_n = ۲^{۲^{n}} + ۱$ مقسوم‌علیهی از $۲^{۲^{n+۱}} - ۱$ و $۲^{۲^{n}} - ۱$ مقسوم‌علیهی از $۲^{۲^{n+۱}} - ۱ - ۲ = ۲^{F_n} - ۲$ می‌باشد ، $۲^{F_n} - ۲$ بر F_n قابل قسمت‌است .

تبصره. ت. باناخه‌ویچ عقیده دارد که فرما ، با توجه به همین قضیهٔ قابل‌قسمت‌بودن $۲^{F_n} - ۲$ بر F_n حکم‌کردکه‌همهٔ‌عددهای $F_n (n = ۱,۲,\ldots)$ اول هستند . درزمان فرما قضیهٔ چینی را صحیح می‌دانستند که برطبق‌آن‌هر عدد طبیعی $m > ۱$ که در شرط قابل قسمت بودن $۲^{m} - ۲$ بر m صدق کند ، عددی است اول . درحقیقت این حکم برای چند صد عدد طبیعی‌اولیه صحیح است. ولی این قضیه برای عدد $m = ۳۴۱ = ۱۱ \times ۱۲$ صحیح‌نیست که در آن زمان هنوز شناخته نشده بود [۵] .

۹ . مثلا همهٔ عددهائی که به ازای $n = ۳^{k}$ بدست می‌آیند ، دارای این خاصیت‌اند $(k = ۱,۲,\ldots)$. این حکم را می‌توان بکمك روش استقراء ریاضی و با استفاده از تجزیهٔ زیر ثابت‌کرد :

$$۲^{۲k+۱}+۱=(۲^{۲k}+۱)(۲^{۲.۲k}-۲^{۲k}+۱)$$

عامل دوم سمت راست تساوی مساوی $(۲^{۲k}+۱)-۲+۴^{۲k}$ وبر ۳ قابل قسمت است (زیرا $۴^{۲k}$ در تقسیم بر ۳ ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهد و $۱+۲^{۲k}$ طبق فرض بر ۳^k قابل قسمت است) .

۱۰ . وقتی $n=۱$ باشد ، حکم صحیح است ، زیرا مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ ، باقیمانده‌ای مساوی واحد می‌دهد . فرض می‌کنیم که برای عدد فرد k ، به‌ازای عدد طبیعی n ، عدد $k^{۲^n}-۱$ بر $۲^{n+۲}$ قابل قسمت باشد . دراینصورت داریم : $k^{۲^n}=۲^{n+۲}t+۱$ ، t عددی است صحیح ، یعنی

$$k^{۲^{n+۱}}=(۲^{n+۲}t+۱)^۲=۲^{۲n+۴}t^۲+۲^{n+۳}t+۱=$$
$$=۲^{n+۳}(۲^{n+۱}t^۲+t)+۱$$

ودرنتیجه $k^{۲^{n+۱}}-۱$ بر $۲^{n+۳}$ قابل قسمت است . به‌این‌ترتیب اثبات به کمك استقراء ریاضی انجام شد .

۱۱ . کافی است ثابت‌کنیم که هریك از عددهای اول ۱۱ ، ۳۱ و ۶۱ مقسوم علیهی از $۲۰^{۱۵}-۱$ هستند . داریم :

$$\begin{cases} ۲^۵\equiv -۱(\mathrm{mod}۱۱) \\ ۱۰^۵\equiv -۱(\mathrm{mod}۱۱) \end{cases} \Longrightarrow ۲۰^۵\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۱) \Longrightarrow ۲۰^{۱۵}\equiv ۱(\mathrm{mod}۱۱)$$

وازآنجا $۲۰^{۱۵}-۱$ بر ۱۱ قابل قسمت است .

همچنین داریم :

$$۲۰\equiv -۱۱(\mathrm{mod}۳۱) \Longrightarrow ۲۰^{۲}\equiv ۱۲۱\equiv -۳(\mathrm{mod}۳۱) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ۲۰^{۳}\equiv(-۱۱)(-۳)=۳۳\equiv ۲(\mathrm{mod}۳۱) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ۲۰^{۱۵}\equiv ۲^{۵}\equiv ۱(\mathrm{mod}۳۱)$$

واز آنجا $۲۰^{۱۵}-۱$ بر ۳۱ قابل قسمت است . بالاخره :

$$۳^{۴}\equiv ۲۰(\mathrm{mod}۶۱) \Longrightarrow ۲۰^{۱۵}\equiv ۳^{۶۰}\equiv ۱(\mathrm{mod}۶۱)$$

(طبق قضیهٔ کوچك‌فرما)

یعنی $۲۰^{۱۵}-۱$ بر ۶۱ قابل قسمت است .

۱۲ . فرض می‌کنیم : $d=\left(\frac{a^m-۱}{a-۱}\ ,\ a-۱\right)$ ، باتوجه به‌اتحاد

$$\frac{a^m-۱}{a-۱}=(a^{m-۱}-۱)+(a^{m-۲}-۱)+\dots+(a-۱)+m \quad (۱)$$

واینکه $a^k-۱$ بر $a-۱$ قابل قسمت است (به ازای $k=۰,۱,۲,\dots$) نتیجه می‌گیریم‌که m بر d قابل قسمت است . اگر عددهای $a-۱$ و m مقسوم‌علیه مشترکی‌مثل $\delta>d$ داشته باشند ، باتوجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $\frac{a^m-۱}{a-۱}$ بر δ قابل قسمت است ودوعدد $a-۱$ و $\frac{a^m-۱}{a-۱}$ مقسوم‌علیه مشترك $\delta>d$ دارند. ازاینجا نتیجه می‌گیریم‌که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای $a-۱$ و m است .

۱۳ . میدانیم‌که برای هرعدد طبیعی n داریم :

$$۱^{۳}+۲^{۳}+\dots+n^{۳}=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$$

(که مثلا می‌توان آنرا بسادگی و به کمك استقراء ریاضی ثابت کرد) .

همچنین به کمك استقراء ریاضی می‌توان ثابت‌کردکه‌برای هرعددطبیعی

n رابطهٔ زیر صحیح است :

$$۱^۵+۲^۵+\cdots+n^۵=\frac{۱}{۱۲}n^۲(n+۱)^۲(۲n^۲+۲n-۱)$$

واز این روابط نتیجه می‌شود :

$$\frac{۳(۱^۵+۲^۵+\cdots+n^۵)}{۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳}=۲n^۲+۲n-۱$$

۱۴ . همهٔعددهای فرد $n>۱$ ،دارای این‌خاصیت‌اند . درحقیقت اگر n عددی فردو بزرگتر از واحد باشد، $\frac{n-۱}{۲}$ عددی طبیعی می‌شود و به ازای $k=۱,۲,\cdots,\frac{n-۱}{۲}$ واضح است‌که $k^n+(n-k)^n$ بر n قابل‌قسمت‌است(زیرا $k^n=-(-k)^n$ است). بنابراین نتیجه می‌گیریم‌که $۱^n+۲^n+\cdots+(n-۱)^n$ بر n قابل‌قسمت است .

حالا فرض کنید n عددی زوج باشد و ۲^s را بزرگترین توانی از ۲ می‌گیریم که n را عاد کند (s عددی طبیعی است) . چون $s<۲^s$ است، برای عددهای زوج k واضح است‌که k^n بر ۲^s قابل قسمت است، برای عددهای فرد k هم(که تعدادآنها دردنبالهٔ $۱،۲،\cdots،n-۱$ مساوی $\frac{n}{۲}$ است) باتوجه به قضیهٔ اولر داریم : $۲k^{s-۱}\equiv۱(\mathrm{mod}۲^s)$ ، یعنی $k^n\equiv۱(\mathrm{mod}۲^s)$ (زیرا n بر $۲^{s-۱}$ قابل قسمت است) ، ازآنجا :

$$۱^n+۳^n+\cdots+(n-۳)^n+(n-۱)^n\equiv\frac{n}{۲}(\mathrm{mod}۲^s)$$

بنابراین اگر $۲^n+۴^n+\cdots+(n-۲)^n$ بر ۲^s قابل قسمت باشد ،

داریم :

$$۱^n+۲^u+۳^n+\dots+(n-۱)^n=\frac{n}{۲}(\mathrm{mod}\ ۲^s)$$

حال اگر فرض کنیم که $(n-۱)^n+\dots+۲^n+۱^n$ بر n قابل قسمت باشد ، چون n بر ۲^s قابل قسمت است ، به همنهشتی $\frac{n}{۲}\equiv ۰(\mathrm{mod}\ ۲^s)$ می‌رسیم که از آنجا باید $\frac{n}{۲}$ بر ۲^s و n بر $۲^{s+۱}$ قابل قسمت باشد ، که بافرضی‌که برای s کردیم متناقض است . به‌این ترتیب اگر n عددی زوج باشد ، $(n-۱)^n+\dots+۲^n+۱^n$ بر n قابل‌قسمت نیست .

تبصره . به‌کمك قضیهٔ کوچك فرما می‌توان ثابت کرد که اگر n عددی اول‌باشد ، $(n-۱)^{n-۱}+\dots+۲^{n-۱}+۱^{n-۱}+۱$ بر n قابل قسمت است ؛ ولی حتی یك عدد غیر اول هم برای n شناخته نشده است که به ازای آن حکم بالا صحیح باشد. **گ. جوگا** تحقیق کرده است که چنین عدد مرکبی کوچکتر از $۱۰^{۱۰۰۰}$ نیست وازآنجا نتیجه گرفته است که چنین عددی بطور کلی وجود ندارد .

۱۵ . چهار حالت درنظر می‌گیریم :

a) $n=۴k$ ، k عددی است طبیعی ، دراینصورت

$$a_n=۲^{۸k+۱}-۲^{۴k+۱}+۱\equiv ۲-۲+۱=۱(\mathrm{mod}۵)$$

$$b_n=۲^{۸k+۱}+۲^{۴k+۱}+۱\equiv ۲+۲+۱\equiv ۰(\mathrm{mod}۵)$$

b) $n=۴k+۱$ $(k=۰,۱,۲\dots)$ ، دراینصورت

$$a_n=۲^{۸k+۲}-۲^{۴k+۲}+۱\equiv ۸-۴+۱\equiv ۰(\mathrm{mod}۵)$$

$$b_n=۲^{۸k+۳}+۲^{۴k+۲}+۱\equiv ۸+۴+۱\equiv ۳(\mathrm{mod}۵)$$

c) $n=4k+2$ $(k=0,1,2,\cdots)$ ، در اینصورت

$$a_n=2^{8k+5}-2^{4k+3}+1\equiv 2-8+1\equiv 0 \pmod 5$$

$$b_n=2^{8k+5}+2^{4k+3}+1\equiv 2+8+1\equiv 1 \pmod 5$$

d) $n=4k+3$ $(k=0,1,2,\cdots)$ ، دراینصورت

$$a_n=2^{8k+7}-2^{4k+4}+1=8-1+1=3 \pmod 5$$

$$b_n=2^{8k+7}+2^{4k+4}+1=8+1+1=0 \pmod 5$$

بنابراین ، عدد a_n تنها وقتی بر ۵ قابل قسمت است که در تقسیم n بر ۴ ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ یا ۲ داشته باشیم ، همچنین عدد b_n تنها وقتی بر ۵ قابل قسمت است که در تقسیم n بر ۴ ، باقیمانده‌ای مساوی ۰ یا ۳ داشته باشیم ، از دو عدد a_n و b_n همیشه یکی (و تنها یکی) بر ۵ قابل قسمت است .

۱۶. کافی است $x=2n-1$ بگیریم . در اینصورت ، چون هر یك ازعددهای x، x^x، x^{x^x} ، ...فرد هستند، عدد $2n=x+1$ مقسوم‌علیه هر یك از عددهای دنبالهٔ نامحدود $x+1$ ، x^x+1، $x^{x^x}+1$ ، . . . خواهد بود .

۱۷. از این قبیل ، مثلا همهٔ عددهای اول p به‌صورت $4k+3$ هستند . در حقیقت ، وقتی x عددی زوج باشد ، هر یك از جمله‌های دنبالهٔ x، x^x، x^{x^x} ، ... عددهائی زوج هستند . بنابراین ، اگر جمله‌ای از دنبالهٔ x^x+1، $x^{x^x}+1$،... بر p قابل قسمت باشد، برای عددطبیعی مانند m باید $x^{2m}+1$ بر p قابل‌قسمت باشد، بنابراین بدست‌می‌آید $(x^m)^2=-1 \pmod p$ ، که ممکن نیست (زیرا -1 نمی‌تواند باقیماندهٔ تقسیم یك مربع کامل بر عدد اول $p=4k+3$ باشد) .

۱۸ . از بسط[۱]

$$(۱+n)^n = ۱ + \binom{n}{۱}n + \binom{n}{۲}n^۲ + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$

نتیجه می‌شود که برای $n>۱$ (که می‌توان فرض کرد ، زیرا $۲^{۱}-۱$ بر $۱^۲$ قابل قسمت است) همهٔ جمله‌ها ، با شروع از جملهٔ سوم ، شامل عامل n با نمای بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند، جملهٔ دوم‌هم $\binom{n}{۱}n = n^۲$ است . بنابراین $(۱+n)^n - ۱$ بر $n^۲$ قابل قسمت است .

۱۹ . با توجه به مسئلهٔ ۱۸ ، برای مقادیر طبیعی m ، عدد $(m+۱)^m - ۱$ بر $m^۲$ قابل قسمت است . بنابراین اگر $m = ۲^n - ۱$ باشد $(m+۱)^m = ۲^{n(۲^n-۱)}$ می‌شود، یعنی $۲^{n(۲^n-۱)}-۱$ بر $(۲^n - ۱)^۲$ قابل قسمت است .

$۲^۳ + ۱۰۲۰$ بر ۳ قابل قسمت است . اگر برای یك مقدارطبیعی m ، عدد $۲^{۳^m}+۱$ بر ۳^m قابل قسمت باشد ، خواهیم داشت : $۲^{۳^m} = ۳^m.k - ۱$ (k عددی طبیعی است) ، از آنجا خواهیم داشت :

$$۲^{۳^{m+۱}} = (۳^m.k - ۱)^۳ = ۳^{۳m}.k^۳ - ۳^{۲m+۱}.k^۲ +$$
$$+ ۳^{m+۱}.k - ۱ = ۳^{m+۱}t - ۱$$

که در آن t عددی است طبیعی . بنابراین $۲^{۳^{m+۱}}+۱$ بر $۳^{m+۱}$ قابل

---

۱) علامت $\binom{n}{k}$ ، نوع دیگری از نمایش ضریب دو جمله‌ای ، یعنی C_n^k ، است . این علامت بطورکلی برای مفهوم وسیع‌تری بکار می‌رود یعنی: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)}{۱.۲\cdots k}$ ، که در آن k عدد مثبت و صحیح و n عدد حقیقی دلخواهی است . گاهی ، علامت $\binom{n}{۰}$ را برابر با واحد می‌گیرند .

قسمت می‌شود؛ازاینجا به‌کمك استقراء ریاضی نتیجه می‌شودکه $۲^{۳^m}+۱$ برای $m=۱,۲,\cdots$ بر ۳^m قابل‌قسمت است .

عددهای طبیعی دیگری هم برای n وجود دارد ، بطوری که به ازای آنها $۲^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد . در حقیقت ، اگر $۲^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد ، وقتی که n یك عدد طبیعی است ، $۲^{۲^n}+۱$ هم بر $۲^n+۱$ قابل قسمت خواهد بود . زیرا اگر $۲^n+۱=k.n$ (k عددی طبیعی است) باشد ، واضح است که $k.n$ عددی فرد می‌شود و $۲^{۲^n}+۱=۲^{kn}+۱$ بر $۲^n+۱$ قابل قسمت خواهد بود ، مثلا از قابل قسمت بودن $۲^۹+۱$ بر ۹ نتیجه می‌شود که $۲^{۵۱۳}+۱$ هم بر ۵۱۳ قابل قسمت است .

حالا فرض می‌کنیم‌که n عددی اول و $۲^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد، دراینصورت، با توجه به قضیهٔ‌کوچك فرما ، $۲^n-۲$ هم بر nقابل قسمت است ، بنابراین باید ۳ بر n قابل قسمت ، یعنی $n=۳$ باشد . به این ترتیب تنها یك عدد اول n وجود دارد ، بنحوی که $۲^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد ، یعنی $n=۳$.

۲۱* . تنها یك عدد فرد $n=۱$ ، با این خاصیت ، وجود دارد. فرض کنیم n عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد ، بنحوی که $۳^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد . p راکوچکترین مقسوم‌علیه اول n می‌گیریم. واضح است که p مساوی ۲ یا ۳ نمی‌تواند باشد یعنی $p>۳$ است . α را نمای طبیعی ۲ نسبت به مدول p می‌گیریم‌که به‌ازای آن $۳^\alpha-۱$بر p قابل قسمت‌باشد. چون $p>۳$ است، طبق‌قضیهٔ‌کوچك فرما $۳^{p-۱}-۱$ بر p و طبق فرض $۳^{۲n}-۱$ بر p قابل قسمت است ، بنابراین نتیجه

می‌گیریم که هم $p-1$ و هم $2n$ بر α قابل قسمت‌اند . اگر α عددی فرد باشد، n بر α قابل قسمت می‌شود وچون $\alpha<p$ و p کوچکترین مقسوم‌علیه اول n است باید $\alpha=1$ باشد، یعنی $2^{p-1}-1$ بر p قابل قسمت است که قابل قبول نیست ، زیرا $p>3$ بود . بنابراین α باید عددی زوج باشد : $\alpha=2k$ ، و چون $2n$ بر α قابل قسمت است، n بر k قابل قسمت می‌شود، و بنابراین k عددی است فرد . اگر $k=1$ باشد $\alpha=2$ و $2^{p-1}-1$ بر p قابل قسمت و $p=2$ می‌شود که قابل قبول نیست . بنابراین $k>1$ و $k<\alpha<p$ می‌شود که ممکن نیست ، زیرا p کوچکترین مقسوم‌علیه اول n بود ، در حالیکه حالا n بر $k<p$ قابل قسمت است .

تبصره. اگر a عدد طبیعی باشد ، بنحوی که $a+1$ مساوی توانی از ۲ نشود (یعنی $a\neq 1,3,7,15,\ldots$) ، بی‌نهایت عدد طبیعی برای n پیدا می‌شود ، طوری‌که a^n+1 بر n قابل قسمت باشد .

اثبات این‌قضیه (با کمی اختلاف نسبت به‌اثبات **رویتر**) چنین است:

چون $a+1$ توانی از ۲ نیست باید مقسوم‌علیه اولی مانند $p>2$ داشته باشد . حالا لم زیر را ثابت می‌کنیم .

لم. اگر برای عدد صحیح $k\geqslant 0$ ، $a^{p^k}+1$ بر p^{k+1} قابل قسمت باشد (a عددی طبیعی و بزرگتر از واحد و p عدد فرد اول است) ، در اینصورت $a^{p^{k+1}}+1$ بر p^{k+2} قابل قسمت خواهد بود .

اثبات. فرض می‌کنیم برای عدد صحیح $k\geqslant 0$ ، عدد $a^{p^k}+1$ بر p^{k+1} قابل قسمت باشد . $a^{p^k}=b$ می‌گیریم . $b+1$ بر p^{k+1} قابل قسمت است، یعنی $b\equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$. چون p عددی است فرد ، داریم :

$$a^{p^{k+1}}+1=b^p+1=(b+1)(b^{p-1}-b^{p-2}+\ldots-b+1) \quad (*)$$

و چون $b\equiv -۱(\mathrm{mod}p^{k+۱})$ و یا $b\equiv -۱(\mathrm{mod}p)$ ، خواهیم داشت :

$$b^{۲l}\equiv ۱(\mathrm{mod}p)\ ,\ b^{۲l-۱}\equiv -۱(\mathrm{mod}p)\quad (l=۱,۲,\dots)$$

از آنجا :

$$b^{p-۱}-b^{p-۲}+\dots-b+۱\equiv ۱+۱+\dots+۱=p\equiv ۰(\mathrm{mod}p)$$

بنابراین عامل دوم سمت راست رابطهٔ (*) بر p قابل قسمت است و چون عامل اول بر $p^{k+۱}$ قابل قسمت بود ، حاصلضرب آنها یعنی $a^{p^k}+۱$ بر $p^{k+۲}$ قابل قسمت می‌شود .

با استفاده از این لم و به‌کمك استقراء ریاضی می‌توان ثابت‌کرد که اگر $a+۱$ بر p قابل قسمت باشد $a^{p^k}+۱$ بر $p^{k+۱}$ و در نتیجه $a^{p^k}+۱$ بر p^k (برای $k=۱,۲,\dots$) قابل قسمت است . بنابراین بی‌نهایت عدد طبیعی برای n وجود دارد . بنحوی‌که $a^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۲* . بنابر قضیهٔ رویتر ،که‌در تبصرهٔ مسئلهٔ قبل ثابت کردیم ، کافی است ثابت‌کنیم‌که برای هر عدد فرد $a>۱$. بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $a^n+۱$ بر n قابل قسمت باشد . واضح است که به‌ازاء $n=۲$ ، با توجه به فرد بودن a ، عدد $a^۲+۱$ بر ۲ قابل قسمت است . ضمناً واضح است‌که $a^۲$ عددی به‌صورت $۸k+۱$ می‌باشد، یعنی $a^۲+۱=۸k+۲=۲(۴k+۱)$ مساوی دو برابر یك عدد فرد است. حالا لم زیر راثابت می‌کنیم .

لم . اگر a عددی فرد و بزرگتر از واحد ، s و $a^s+۱$ هرکدام دو برابر یك عدد فرد و $a^s+۱$ بر s قابل قسمت باشد ، عدد طبیعی $s_۱>s$ وجود دارد ، بنحوی که $s_۱$ و $a^{s_۱}+۱$ هر یك دو برابر یك عدد فرد و $a^{s_۱}+۱$ بر $s_۱$ قابل قسمت باشد .

اثبات. چون a^s+1 بر s قابل قسمت و a^s+1 دو برابر عددهائی فرد هستند، $a^s+1=ms$ می‌شود بطوریکه m عددی فرد است. از آنجا $a^{ms}+1$ بر a^s+1 یا $a^{a^s}+1$ بر a^s+1 قابل‌قسمت می‌شود ضمناً چون a^s+1 عددی است زوج، $a^{a^s}+1$ دو برابر یک عدد فرد است.

به این ترتیب برای $s_1=a^s+1$، عدد $a^{s_1}+1$ بر s_1 قابل‌قسمت است و ضمناً s_1 و $a^{s_1}+1$ هرکدام دو برابر یک عدد فرد هستند و (چون $a>1$ است) داریم:

$$s_1=a^s+1>s$$

حالا اگر $s=2$ فرض کنیم، با توجه به فرد بودن a، شرایط لم برقرار است و در نتیجه بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که a^n+1 بر n قابل قسمت باشد.

۲۳*. ثابت می‌کنیم که اگر n عددی زوج باشد بنحوی که 2^n+2 بر n و 2^n+1 بر $n-1$ قابل قسمت باشند (که مثلا به ازای $n=2$ صحیح است)، برای عدد $n_1=2^n+1$ هم همین خاصیت وجود دارد، یعنی $2^{n_1}+2$ بر n و $2^{n_1}+1$ بر n_1-1 قابل‌قسمت است.

اگر 2^n+2 بر n قابل‌قسمت و n عددی زوج باشد $2^n+2=nk$ (k عددی است فرد) می‌شود و بنابراین $2^{2^n}+1=2^{nk}+1$ بر 2^n+1 قابل قسمت می‌شود؛ به این ترتیب برای $n_1=2^n+2$، عدد $2^{n_1}+1$ بر n_1-1 قابل قسمت است. از طرف دیگر، چون 2^n+1 بر $n-1$ قابل قسمت است داریم: $2^n+1=(n-1)m$ (m عددی است فرد) و بنابراین $2^{2^n}+1=2^{(n-1)m}+1$ بر $2^{n-1}+1$ قابل

قسمت واز آنجا $۲^{۲^n}+۲$ بر $۲^n+۲$ یعنی $۲^{n_۱}+۲$ بر $n_۱$ قابل‌قسمت است .

چون $n_۱=۲^n+۲>n$ است، بی‌نهایت‌عدد زوج n وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می‌کند . با شروع از $n=۲$ ، با روش مذکور ، دنبالهٔ عددهای $۲،۶،۶،۲+۲^{۶۶}،...$ بدست می‌آید . ولی ، همانطور که **بیندشدلر** متذکر می‌شود ، از این راه نمی‌توان همهٔ عددهای طبیعی n را بدست آورد ، بطوریکه به‌ازای آنها $۲^n+۲$ بر n قابل قسمت باشد . مثلاً $۲^{۹۴۶}+۲$ بر ۹۴۶ قابل‌قسمت است ، زیرا $۹۴۶=۲.۱۱.۴۳$ است ، چون $۵^۵+۱$ بر ۱۱ قابل‌قسمت‌است درنتیجه $۲^{۹۱۵}+۱=۲^{۵.۱۸۹}+۱$ بر ۱۱ قابل قسمت است و از آنجا $۲^{۹۴۶}+۲$ بر ۱۱ قابل قسمت می‌شود؛ ازطرف دیگرداریم : $۱۰۲۸=۳.۴۳-۱=۲^۷$ و از آنجا $۲^۷+۱$ بر ۴۳ قابل قسمت‌است وچون‌داریم: $۹۴۵=۷.۱۳۵$ بنابراین $۲^{۹۴۵}+۱=۲^{۷.۱۳۵}+۱$ بر ۴۳ و در نتیجه $۲^{۹۴۶}+۲$ بر ۴۳ قابل قسمت می‌شود .

۲۴ . اگر a عددی‌طبیعی و r باقیماندهٔ‌تقسیم عدد a بر ۱۰ باشد ، تنها وقتی $a^{۱۰}+۱$ بر ۱۰قابل قسمت‌است‌که $r^{۱۰}+۱$ بر ۱۰قابل قسمت باشد. بنابراین بجای r می‌توان عددهای $۹،...،۲،۱،۰$ را در نظرگرفت که در مورد آنها تنها $۳^{۱۰}+۱$ و $۷^{۱۰}+۱$ بر ۱۰ قابل قسمت است . به این ترتیب به ازای همهٔ عددهای طبیعی a که بصورت $۱۰k+۳$ و $۱۰k+۷$ $(k=۰,۱,۲,...)$ باشند ، $a^{۱۰}+۱$ بر ۱۰ قابل قسمت‌است .

۲۵* . اثبات آ. شینتسل. $۲^n-۱>n>۱$ را بر n قابل قسمت می‌گیریم . p راکوچکترین مقسوم علیه اول n و α را نمای‌عدد۲ نسبت

بمدول p فرض می‌کنیم. دراینصورت $۱-۲^{\alpha}$ بر p و(طبق قضیهٔ کوچك فرما) $۱-۲^{p-۱}$ بر p قابل قسمت می‌شود ، طبق فرض هم $۱-۲^{n}$ بر n و در نتیجه بر p قابل قسمت بود ، بنابراین $p-۱$ و n بر α قابل قسمت و $p>\alpha$ می‌شود . از طرف دیگر $\alpha>۱$ است ، زیرا نمی‌شود فرض کردکه $۱-۲^{۱}$ بر p قابل‌قسمت‌است. بنابراین عدد n مقسوم علیهی بزرگتر از واحد وکوچکتر از p پیدا می‌کند که متناقض با فرض است (p راکوچکترین مقسوم‌علیه اول n گرفته‌بودیم) .

۲۶ . واضح است‌که n نمی‌تواند مضربی از۳باشد . اگر در تقسیم n بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی واحد بدست‌آید ، باید عدد $۱+۲^{n}$ مضربی از ۳ باشد . یعنی باید n عدد فردی باشد و در نتیجه n عددی بصورت $۶k+۱$ در می‌آید ($k\geqslant ۰$ و عددی صحیح) . اگر در تقسیم n بر ۳ باقیماندهٔ ۲ بدست آید ، باید عدد $۱+۲.۲^{n}$ بر ۳ قابل قسمت باشد و بنابراین n باید عددی زوج وبصورت $۶k+۲$ باشد $(k=۰,۱,۲,\dots)$.
به‌این ترتیب همهٔ عددهای طبیعی n که به‌ازای آنها $۱+n.۲^{n}$ بر ۳ قابل‌قسمت‌است به‌صورت $n=۶k+۱$ و $n=۶k+۲$ $(k=۰.۱,۲,\dots)$ هستند .

۲۷ . اگر p عددی اول وفرد باشد و داشته باشیم :

$$n=(p-۱)(k.p+۱) \qquad (k=۰,۱,۲,\dots)$$

خواهیم داشت : $n\equiv -۱ (\mathrm{mod}\, p)$ و n بر $p-۱$ قابل قسمت می‌شود ، از اینجا با توجه بـه قضیهٔ کوچك فـرما : $۲^{n}\equiv ۱ (\mathrm{mod}\, p)$ و عـدد $۱+n.۲^{n}$ بر p قابل قسمت می‌شود .

تبصره. از این مسئله نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد مرکب بصورت $n.2^n+1$ (n عددی طبیعی است) وجود دارد . عددهائی‌که به‌اینصورت باشند ، **عددهای کالن** نامیده می‌شوند .

ثابت شده است‌که همهٔ‌این عددها برای $n<141<1$ مرکب‌اند ولی به‌ازای $n=141$ ، عدد $n.2^n+1$ ، عددی اول می‌شود . معلوم نیست‌که آیا بین عددهای‌کالن بی‌نهایت عدد اول وجود دارد یا نه؟

۲۸ . n را یك عدد طبیعی و k را عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌گیریم ، بنحوی‌که $2^k>n$ باشد ، p را هم عددی اول فرض می‌کنیم که از $k.2^{k-1}$ بزرگتر باشد. چون $k>1$ است، برای $x=2^k$ و $y=2p$ واضح است‌که y بر x قابل قسمت‌نیست ولی y^y بر x^x قابل قسمت‌است زیرا $x^x=2^{k.2^k}$ و $y^y=(2p)^{2p}$ و ضمناً $2p>k.2^k$ است . مثلاً 10^{10} بر 4^4 قابل قسمت است ، در حالیکه ۱۰ بر ۴ قابل قسمت‌نیست؛ 12^{12} بر 8^8 قابل قسمت است ، در حالیکه ۱۲ بر ۸ قابل قسمت نیست؛ 21^{21} بر 9^9 قابل قسمت است ، در حالیکه ۲۱ بر ۹ قابل قسمت‌نیست.

۲۹ . بترتیب به‌عوامل اول تجزیه می‌کنیم :

$$1^2-3=-2,2^2-3=1,3^2-3=2.3,4^2-3=13,$$
$$5^2-3=2.11,6^2-3=3.11,7^2-3=2.23,8^2-3=61,$$
$$9^2-3=2.3.13,10^2-3=97,11^2-3=2.59,$$
$$12^2-3=3.47,13^2-3=2.83,14^2-3=193,$$
$$15^2-3=2.3.37,16^2-3=11.23,17^2-3=2.11.13,$$
$$18^2-3=3.107,19^2-3=2.179,20^2-3=397,$$
$$21^2-3=2.3.73,22^2-3=13.37,23^2-3=2.263,$$
$$24^2-3=3.191,25^2-3=2.311,26^2-3=673,$$
$$27^2-3=2.3.113,$$

به این ترتیب ، کوچکترین عدد طبیعی n که به‌ازای آن $n^۲-۳$ برمجذور کامل یك عدد طبیعی بزرگتر از واحد، قابل قسمت باشد، عبارتست از $n=۲۷$.

چون $(۲۷+۱۲۱k)^۲-۳$ بر $۲۷^۲-۳$ بر $۱۱^۲$ قابل قسمت است ، هم بر $۱۱^۲$ قابل قسمت خواهد بود (به‌ازای $k=۰,۱,۲,\ldots$). از اینجا نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $n^۲-۳$ برمجذور کامل یك عدد طبیعی بزرگتر از واحد قابل قسمت باشد.

تبصره (آ. شینتسل) . می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی m عدد صحیح a وجود دارد، بنحوی که حتی یکی از عددهای $a^۲+۱$، $a^۲+۲$،...، $a^۲+m$ برمجذور کامل یك عدد طبیعی بزرگتر از واحد قابل قسمت نباشد. همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، بی‌نهایت عدد طبیعی x وجود دارد ، که به‌ازای آنها عدد $f(x)$ ، مقسوم‌علیه مجذور کاملی بزرگتر از واحد داشته باشد .

۳۰* . اگر n عددی طبیعی باشد $n!$ بر $\varphi(x)$ قابل قسمت است. در حقیقت، برای $n=۱$ حکم واضح است؛ اگر $n>۱$ ، و $n=q_۱^{\alpha_۱}\cdot q_۲^{\alpha_۲}\cdots q_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ عدد n به عوامل اول باشد $(q_۱<q_۲<\cdots<q_k)$ ، در اینصورت $\varphi(n)=q_۱^{\alpha_۱-۱}q_۲^{\alpha_۲-۱}\cdots q_k^{\alpha_k-۱}(q_۱-۱)\cdots(q_k-۱)$ و n بر $q_۱^{\alpha_۱-۱}q_۲^{\alpha_۲-۱}\cdots q_k^{\alpha_k-۱}$ قابل قسمت و $q_{k-۱}<q_k\leqslant n$ است، از آنجا $q_k-۱<n$ می‌شود و $q_k-۱>\cdots>q_۲-۱>q_۱-۱$، عددهای مختلف طبیعی کوچکتر از n هستند ، بنحوی که عدد $(n-۱)!$ بر عدد $(q_۱-۱)(q_۲-۱)\cdots(q_k-۱)$ قابل قسمت است .

در نتیجه $n!=n(n-۱)!$ بر $\varphi(x)$ قابل قسمت می‌شود .

وقتی که n عددی فرد باشد ، طبق قضیهٔ اولر ، $۲^{\varphi(x)}-۱$ بر n

قابل قسمت است و چون $۱ - ۲^{n!}$ بر $۱ - ۲^{\varphi(n)}$ قابل قسمت است ، $۱ - ۲^{n!}$ بر n قابل قسمت می‌شود .

۳۱ . طبق قضیهٔ کوچك فرما $۱ - ۲^{۴}$ بر ۵ و $۱ - ۲^{۱۲}$ بر ۱۳ قابل قسمت است . بنابراین ، با توجه به‌اینکه $۳ - ۲^{۲}$ بر ۵ و $۳ - ۲^{۴}$ بر ۱۳ قابل قسمت است ، برای $k = ۰,۱,۲,\ldots$ عدد $۳ - ۲^{۴k+۳}$ بر ۵ و $۳ - ۲^{۱۲k+۴}$ بر ۱۳ قابل قسمت است .

چون $۲^{۶} \equiv -۱ \pmod{۶۵}$ ، پس $۲^{۱۲} \equiv ۱ \pmod{۶۵}$ و $۲^{n+۱۲} - ۳ \equiv ۲^{n} - ۳ \pmod{۶۵}$. از همنهشتی اخیر نتیجه می‌شود که دنبالهٔ باقیمانده‌های $۲^{n} - ۳ \; (n = ۲,۳,\ldots)$ بر ۶۵ متناوب است و هر دورهٔ تناوب آن شامل ۱۲ جمله است[۱] بنابراین برای اینکه ثابت کنیم هیچیك از عددهای $۲^{n} - ۳ \; (n = ۲,۳,\ldots)$ بر ۶۵ قابل قسمت نیستند، کافی است تحقیق کنیم که هیچیك از عددهای $۲^{n} - ۳$ برای $m = ۲,۳,\ldots,۱۳$ بر ۶۵ قابل قسمت نیستند . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که در تقسیم هر یك از این عددها بر ۶۵ بترتیب باقیمانده‌های ۱، ۵، ۱۳، ۲۹، ۶۱، ۶۰، ۵۸، ۵۴، ۴۶، ۳۰، ۶۳، ۶۴ بدست می‌آید که هیچکدام آنها مساوی صفر نیست.

***۳۲ .** چهار عدد مرکب کوچکتر از n ، که به‌ازای آنها $۲ - ۲^{n}$ بر n قابل قسمت است، عبارتند از ۳۴۱ ، ۵۶۱، ۶۴۵ و ۱۱۰۵ . برای ۳۴۱، عدد $۳ - ۳۴۱$ بر ۳۴۱ قابل قسمت نیست ، زیرا طبق قضیهٔ کوچك فرما، $۱ - ۳۴۰$ بر ۳۱ و درنتیجه $۱ - ۳۳۰$ بر ۳۱ قابل قسمت است، بنابراین $۳۴۱ \equiv ۳ \pmod{۳۱}$. سپس ، چون $۳^{۴} \equiv -۴ \pmod{۳۱}$ است ، $۳^{۹} \equiv -۶۴ \equiv -۲ \pmod{۳۱}$ و از آنجا $۳^{۱۱} \equiv -۱۸ \pmod{۳۱}$،

---

۱) تبصرهٔ [۴] را ببینید .

و بنابراین $۳^{۳۱} - ۳ \equiv ۲۱ \pmod{۳۱}$ می‌شود و بنابراین $۳^{۳۴۱} - ۳$ بر ۳۴۱ و طبعاً بر $۱۱.۳۱ = ۳۴۱$ قابل قسمت نیست. ولی $۳^{۵۶۱} - ۳$ بر $۳.۱۱.۱۷ = ۵۶۱$ قابل قسمت است، زیرا $۳^{۱۰} - ۱$ بر ۱۱ واز آنجا $۳^{۳۴۰} - ۱$ بر ۱۱ و در نتیجه $۳^{۳۴۱} - ۳$ بر ۱۱ قابل قسمت‌است؛ همچنین $۳^{۱۶} - ۱$ بر ۱۷، از آنجا $۳^{۱۶.۳۵} - ۱ = ۳^{۵۶۰} - ۱$ بر ۱۷ و بنابراین $۳^{۵۶۱} - ۳$ بر ۱۷ قابل‌قسمت است. به‌این‌ترتیب‌کوچکترین‌عدد مرکب n، که به ازای آن $۲^n - ۲$ و $۳^n - ۳$ بر n قابل قسمت باشند، $n = ۵۶۱$ است.

عدد ۶۴۵ مقسوم‌علیه $۳^{۶۴۵} - ۳$ نیست، زیرا $۳.۵.۴۳ = ۶۴۵$ است. از طرف دیگر $۳^{۳۴۲} - ۱$ بر ۴۳ و در نتیجه $۳^{۳۴۲.۱۵} - ۱$ بر ۴۳ $(۶۳۰ = ۴۲.۱۵)$ قابل قسمت است و از آنجا $۳^{۱۵} \equiv ۳^{۶۴۵} \pmod{۴۳}$. سپس $۳^۴ \equiv -۵ \pmod{۴۳}$ وبنابراین $۳^۶ \equiv -۴۵ \equiv ۲ \pmod{۴۳}$، $۳^{۱۲} \equiv ۴ \pmod{۴۳}$ و $۳^{۱۵} \equiv ۱۰۸ \equiv ۲۲ \pmod{۴۳}$ می‌شود و از آنجا $۳^{۶۴۵} - ۳ \equiv ۱۹ \pmod{۴۳}$ می‌شود، یعنی $۳^{۶۴۵} - ۳$ بر ۴۳ قابل‌قسمت نیست.

عدد ۱۱۰۵ مقسوم علیه عدد $۳^{۱۱۰۵} - ۳$ می باشد، زیرا $۳.۱۳.۱۷ = ۱۱۰۵$ است و داریم:

$$۳^۴ \equiv ۱ \pmod{۵} \Longrightarrow ۳^{۱۱۰۴} \equiv ۱ \pmod{۵} \qquad (۱۱۰۴ = ۴.۲۷۶)$$

و بنابراین $۳^{۱۱۰۵} - ۳$ بر ۵ قابل قسمت است، از طرف دیگر

$$۳^{۱۲} \equiv ۱ \pmod{۱۳} \Longrightarrow ۳^{۱۱۰۴} \equiv ۱ \pmod{۱۳} \qquad (۱۱۰۴ = ۱۲.۹۲)$$

یعنی $۳^{۱۱۰۵} - ۳$ بر ۱۳ قابل قسمت است؛ بالاخره

$$۳^{۱۶} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۱۷) \Longrightarrow ۳^{۱۱۰۴} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۱۷) \quad (۱۱۰۴ = ۱۶ \cdot ۶۹)$$

و در نتیجه $۳ - ۳^{۱۱۰۵}$ بر ۱۷ قابل قسمت است .

به‌این‌ترتیب ،کوچکترین دو عدد مرکب n ، که بـه‌ازای آنها $۲ - ۲^n$ و $۳ - ۳^n$ بر n قابل قسمت باشند، عبارتست از ۵۶۱ و ۱۱۰۵.

تبصره . معلوم نیست که آیا بی‌نهایت عـدد مرکب n وجود دارد ، که به‌ازای آنها $۲ - ۲^n$ و $۳ - ۳^n$ بـر n قابل قسمت باشند . ولی وقتی n عددی‌اول باشد، طبق قضیهٔ‌کوچك فرما ، هم $۲ - ۲^n$ و هم $۳ - ۳^n$ بر n قابل قسمت‌اند .

عددهای مرکب n را ،که به‌ازای آنها $۲ - ۲^n$ بر n قابل قسمت است ، **عددهای اول نما** گویند . **آ. روتکه‌ویچ** ثابت‌کرد‌که در هر تصاعد حسابی $ax + b \quad (x = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ ،بشرطی‌که a و bدوعددطبیعی‌ونسبت بهم اول باشند، بی‌نهایت عدد اول نما وجود دارد [۶] .

۳۳*. چون $۳ - ۳^n$ بر n قابل قسمت‌نیست ، بنابراین طبق‌قضیهٔ کوچك فرما نتیجه می‌گیریم‌که n باید عددی‌مرکب باشد . کوچکترین عدد مرکبی‌که به‌ازای آن $۲ - ۲^n$ بر n قابل‌قسمت باشد ۳۴۱ است و در مسئلهٔ ۳۲ ثابت‌کردیم‌که$۳ - ۳^{۳۴۱}$ بر ۳۴۱قابل‌قسمت‌نیست. بنابراین کوچکترین عدد طبیعی n ، برای‌اینکه $۲ - ۲^n$ بر n قابل قسمت، ولی $۳ - ۳^n$ بر n غیر قابل قسمت باشد ، ۳۴۱ است .

تبصره . آ. روتکه‌ویچ ثابت‌کرد‌که بی‌نهایت عددطبیعی n،چه‌زوج‌وچه فرد وجود دارد، بنحوی‌که $۲ - ۲^n$ برn قابل‌قسمت و $۳ - ۳^n$ برn غیرقابل قسمت باشد .

می‌توان ثابت‌کرد‌که‌کوچکترین عدد طبیعی n ،که به‌ازای‌آن$۲ - ۲^n$

و $۳-۳^n$ بر n قابل قسمت و $۵-۵^n$ بر n غیر قابل قسمت باشد $n=۳۷.۷۳=۲۷۰۱$ است .

۳۴ . این عدد $n=۶$ است . در حقیقت وقتی $۲-۲^n$ بر n قابل قسمت نیست . باید n عددی مرکب باشد. کوچکترین عدد مرکب ۴ است ولی $۳-۳^۴$ بر ۴ قابل قسمت نیست . عدد مرکب بعدی ۶ است وضمناً $۶۲=۲-۲^۶$ بر ۶ قابل قسمت نیست ، ولی $۳-۳^۶$ بر ۶ قابل قسمت است ، زیرا $۳-۳^۶$ عددی است زوج و مضرب ۳ .

تبصره . آ.روتکه‌ویچ ثابت‌کردکه بی‌نهایت عدد مرکب n ، چه زوج و چه فرد ، وجود دارد ، بنحوی‌که $۳-۳^n$ بر n قابل قسمت و $۲-۲^n$ بر n غیر قابل قسمت باشد .

۳۵ . اگر a عددی مرکب باشد، می‌توان $n=a$ فرض‌کرد، زیرا واضح‌است که $a-a^n$ بر a قابل قسمت‌است . اگر $a=۱$ باشد،می‌توان مثلا $n=۴$ گرفت ، زیرا $۱-۱^۴$ بر ۴ قابل قسمت است . وقتی که a عددی اول.و بزرگتر از ۲ باشد ، می‌توان $n=۲a$ فرض‌کرد ، زیرا در اینصورت عدد a فرداست وعدد زوج $a-a^{۲n}$ برعدد فرد a و برعدد۲ و درنتیجه بر $۲a$ قابل قسمت است .

تنهاحالت $n=۳۴۱=۱۱.۳۱=a۲$ باقی‌می‌ماند.دراین‌موردمی‌توان فرض‌کرد که در اینصورت $۲-۲^{۳۴۱}$ بر ۳۴۱ قابل قسمت است ، زیرا $۱-۲^{۱۰}$ و در نتیجه $۱-۲^{۳۴۰}$ بر ۱۱ قابل قسمت است ، یعنی $۲-۲^{۳۴۱}$ بر ۱۱ قابل قسمت می‌شود . همچنین $۱-۲^۵$ و در نتیجه $۱-۲^{۳۴۰}$ بر ۳۱ قابل قسمت ، یعنی $۲-۲^{۳۴۱}$ بر ۳۱ قابل قسمت می‌شود . عدد $۲-۲^{۳۴۱}$ بر ۱۱ و ۳۱ قابل قسمت است ، بنابراین برحاصلضرب آنها یعنی ۳۴۱ قابل قسمت می‌شود .

تبصره . م . چی‌پولا ثابت‌کردکه برای هر عدد طبیعی a ، بی‌نهایت عدد مرکب n وجود دارد ، بنحوی‌که $a^{n-1}-1$ بر n قابل قسمت باشد .

آ.شینتسل ثابت‌کردکه برای هر عدد صحیح a و هر عدد طبیعی m ، دوعددمختلف‌اول $p>m$ و $q>m$ وجود دارد، بنحوی‌که $a^{pq}-a$ بر pq قابل قسمت باشد .

نمی‌دانیم‌که آیا بی‌نهایت عدد مرکب n وجود دارد ،که به‌ازای آنها ، برای هر عدد صحیح a ، عدد a^n-a بر n قابل قسمت باشد. کوچکترین این عددها $n=۵۶۱=۳.۱۱.۱۷$ است .

می‌توان ثابت‌کرد که برای هر عدد طبیعی a ، بی‌نهایت عدد زوج n وجود دارد ، بنحوی‌که a^n-a بر n قابل قسمت باشد ؛ همچنین برای‌هر عدد طبیعی $a>۱$ و هر عدد طبیعی s ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که n مساوی حاصلضرب s عدد اول مختلف باشد و $a^n-۱$ بر n قابل قسمت شود .

۳۶ . مکعب عدد صحیحی که بر ۳ قابل قسمت نباشد ، در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای مساوی ۱ یا ۱ — دارد. اگرهیچیك از عددهای a،b،c بر۳ قابل‌قسمت‌نباشند، از تقسیم $a^۳+b^۳+c^۳$ بر۹ بیکی‌ازباقیمانده‌های $۱\pm۱\pm۱\pm۱$ می‌رسیم ،که هیچ ترکیبی ازعلامتها ، مضربی از ۹ بدست نمی‌دهد . بنابراین اگر $a^۳+b^۳+c^۳$ بر ۹ قابل قسمت باشد abc بر ۳ قابل قسمت است .

۳۷ . اثبات کاملا شبیه مسئلهٔ قبل است ، زیرا از ترکیب علامتها در $۱\pm۱\pm۱\pm۱\pm۱\pm۱$ ، عددی که بر ۹ قابل قسمت باشد ، بدست نمی‌آید .

۳۸. شرط $(x,y)=۱$ لازم است، زیرا مثلاً داریم: $۱۵^۲+۲۰^۲=۵^۴$ در حالیکه ۱۵.۲۰ بر ۷ قابل قسمت نیست . ولی اگر $(x,y)=۱$ و x، y و z چنان باشندکه رابطهٔ $x^۲+y^۲=z^۴$ برقرار باشد، با توجه به معادلهٔ فیثاغورثی ، عددهای m و n وجود دارند ، بنحوی کـه مثلاً $x=m^۲-n^۲$ ، $y=۲mn$ ، $z^۲=m^۲+n^۲$ باشد .

فرض می‌کنیم y بر ۷ قابل قسمت نباشد ،که در اینصورت m و n هم غیر قابل قسمت بر ۷ می‌شوند . بسادگی می‌توان محاسبه کـرد کـه مجذورعدد صحیحی‌که بر۷ قابل‌قسمت نیست ، درتقسیم بر۷باقیمانده‌ای مساوی ۱ یـا ۲ یـا ۴ مـی‌دهد . چـون هیچیك از مجموعهای $۲+۱$ ، $۴+۱$ و $۴+۲$ نه‌مضرب ۷ هستند ونه‌منطبق بریکی ازهمین باقیمانده‌ها، از تساوی $z^۲=m^۲+n^۲$ نتیجه می‌شود کـه عددهای mوn بـاید در تقسیم بر۷ باقیمانده‌های مساوی داشته باشند وازآنجا $x=m^۲-n^۲$ بر ۷ قابل‌قسمت می‌شود .

۳۹*. مثلاً عددهای زیر دارای خاصیت مطلوبند :

$$x=۳۶k+۱۴\ ,\ y=(۱۲k+۵)(۱۸k+۷)$$

$(k=۰,۱,۲,\dots)$. درحقیقت بسادگی می‌توان تحقیق کردکه‌دراینصورت $y(y+۱)$ بر $x(x+۱)$ قابل قسمت است . زیرا داریم :

$$x(x+۱)=۲\ .۳\ .(۱۲k+۵)(۱۸k+۷)=۶y$$

و $y+۱$ هم بر ۶ قابل قسمت است . از طرف دیگر y بر $x+۱$ قابل قسمت نیست، زیرا $x+۱$ بر۳ قابل قسمت است، ولی yبر۳ قابل‌قسمت نیست ؛ $y+۱$ هم بر x قابل قسمت نیست ، زیرا x بر $۱۸k+۷$ قابل قسمت است ، ولی y بر $۱۸k+۷$ قابل قسمت نیست ؛ بالاخره $y+۱$بر

$x+1$ قابل قسمت نیست ، زیرا $x+1$ بر $12k+5$ قابل قسمت است ، در حالیکه $y+1$ بر $12k+5$ قابل قسمت نیست .

به‌ازای $k=0$ بدست می‌آید : $x=14$ ، $y=35$. این دوعدد، کوچکترین زوج عددی هستند که دارای خاصیت مورد نظر می‌باشند .

۴۰ . واضح است که برای $s<10$ داریم : $n_s=s$. سپس با جستجوی بین مضربهای عدد s ، بطور متوالی ، بدست می‌آید :

$$n_{10}=190, n_{11}=209, n_{12}=48, n_{13}=247, n_{14}=266,$$

$$n_{15}=195, n_{16}=448, n_{17}=476, n_{18}=198, n_{19}=874,$$

$$n_{20}=9920, n_{21}=399, n_{22}=2398, n_{23}=1679,$$

$$n_{24}=888, n_{25}=4975 .$$

و بالاخره $n_{100}=19\,999\,999\,999\,900$ ، درحقیقت دورقم‌سمت‌راست هر عددی که بر ۱۰۰ قابل قسمت باشد ، صفر است و ضمناً مجموع رقمهای هرعدد طبیعی کوچکتر از $199\,999\,999\,999$ کمتر از ۱۰۰ می‌باشد .

۴۱* . فرض کنید s عددی طبیعی و به صورت $s=2^{\alpha}.5^{\beta}.t$ باشد (α و β عددهای صحیح غیرمنفی و t ، عددی طبیعی‌غیرقابل‌قسمت بر ۲ و ۵ است) . بر اساس قضیهٔ اولر داریم : $10^{\varphi(t)}\equiv 1 \pmod t$. فرض می‌کنیم :

$$n=10^{\alpha+\beta}\left(10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s.\varphi(t)}\right),$$

عدد n بر s قابل قسمت است ، زیرا $10^{\alpha+\beta}$ بر $2^{\alpha}.5^{\beta}$ قابل قسمت است و داریم :

$$۱۰^{\varphi(t)}+۱۰^{۲\varphi(t)}+\cdots+۱۰^{s\cdot\varphi(t)}\equiv s\equiv ۰ \pmod t$$

(زیرا s بر t قابل قسمت است) . ازطرف دیگر، واضح است که مجموع رقمهای عدد n (در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ۱۰) مساوی s است .

*۴۲ · a) در حالتی که عدد ، مقسوم‌علیه اولی بصورت $۴k+۳$ ندارد، قضیه واضح است. فرض می‌کنیم که قضیه برای همهٔ عددهای طبیعی، که در تجزیهٔ به عوامل اول با نماهای واحد (که طبعاً این عوامل می‌توانند مختلف نباشند) ، دارای $s\geqslant ۰$ عامل اول بصورت $۴k+۳$ هستند، صحیح باشد ؛ و فرض می‌کنیم n عددی طبیعی باشد ، که در تجزیه به عوامل اول (با نماهای واحد) دارای $s+۱$ عامل اول بصورت $۴k+۳$ باشد. $n=mq$ در نظر می‌گیریم، بطوریکه m در تجزیه به عوامل (با نماهای واحد) دارای s عامل اول بصورت $۴k+۳$ و q ، عدد اولی بصورت $۴k+۳$ باشد .

g را تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی عدد m بصورت $۴k+۱$ ، و h را تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد m بصورت $۴k+۳$ فرض می‌کنیم طبق فرضی که در مورد تعداد s کردیم ، $g\geqslant h$ است .

مقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $۴k+۱$ در عدد $m\cdot q$ عبارتست از مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $۴k+۱$ در عدد m (که تعداد آنها g است) ، و حاصلضرب q در هر یك از مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد m که بصورت $۴k+۳$ هستند (که تعداد آنها h است) .

به‌این ترتیب ، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $۴k+۱$ در عدد $m\cdot q$ مساوی $g+h$ است . مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $۴k+۳$ درعدد $m\cdot q$ عبارتست ازمقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $۴k+۳$ در عدد

m(که‌تعدادآنها h است)،وحاصلضرب عدد q درهریك ازمقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $4k+1$ در عدد m(که‌تعداد آنها g است) . ولی دراین حاصلضربهای اخیر ممکن است مقسوم‌علیه‌هائی از عدد m ،که بصورت $4k+3$ بودند ، ظاهر شود .

بنابراین ، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $4k+3$ درعدد $m.q$ کوچکتر یا مساوی $g+h$ است (و می‌تواندکوچکترباشد).

در هر حالتی ، قضیه برای عدد $m.q$ صحیح است . بنابراین بااستفاده از روش‌استقراء ریاضی ، نتیجه می‌گیریم‌که برای هرعددطبیعی n صحیح است .

b) عدد 3^{2n-1} $(n=1,2,\ldots)$ بهمان تعداد که مقسوم‌علیه‌های طبیعی‌بصورت $4k+1$ دارد(که‌عبارتند ازعددهای $3^{2n-2},\ldots,3^4,3^2,1$) بهمان تعداد هم مقسوم‌علیه‌های طبیعی بصورت $4k+3$ دارد(که عبارتند از عددهای $3^{2n-1},\ldots,3^5,3^3,3$) .

c) عدد 3^{2n} ($n=1,2,\ldots$) دارای $n+1$ مقسوم علیه طبیعی بصورت $4k+1$ (که‌عبارتند از $3^{2n},\ldots,3^4,3^2,1$) وفقط n مقسوم‌علیه طبیعی بصورت $4k+3$ است (که عبارتند از $3^{2n-1},\ldots,3^3,3$) . همهٔ $n+1$ مقسوم‌علیه عدد 5^n بصورت $4k+1$ هستند ، در حالیکه این‌عدد حتی یك‌مقسوم‌علیه بصورت $4k+3$ ندارد .

۴۳ . r_1 ، r_2 و r_3 را باقیمانده‌های متناظر تقسیم عدد های a ، $-b$ و $-c$ بر n فرض می‌کنیم . چون این باقیمانده‌ها به دنبالهٔ $n-1,\ldots,2,1,0$ $(n>1)$تعلق دارند ، در این دنباله می‌توان عدد r راطوری انتخاب‌کردکه $r\neq r_1$ ، $r\neq r_2$ و $r\neq r_3$ باشد . فرض‌می‌کنیم

$a+r$ بر n قابل قسمت باشد ، در اینصورت با در نظر گرفتن همنهشتی $a \equiv r_1 \pmod{n}$ ، نتیجه می‌شودکه $r-r_1$ بر n قابل قسمت است. r و r_1 عددهای صحیحی بزرگتر یا مساوی صفروکوچکتر از n هستند؛ بنابراین اگر تفاضل آنها بر n قابل‌قسمت باشد ، باید $r=r_1$ شود ،که با انتخاب عدد r مغایراست. بهمین ترتیب ثابت می‌شودکه $b+r$ و $c+r$ هم بر n قابل قسمت نیستند . بنابراین می‌توان $k=r$ گرفت .

۴ . عددهائی که نسبت بهم اولند

۴۴ . a)میدانیم که هرمقسوم‌علیه بزرگتر از واحد عدد $F_n=2^{2^n}+1$ $(n=1,2,\ldots)$ ، عددی بصورت $k2^{n+2}+1$ است(k عددی طبیعی است). چون برای عددهای طبیعی n و k داریم: $k2^{n+2}+1 \geqslant 2^{n+2}+1 > n$ ، بنابراین هرمقسوم‌علیه بزرگتر از واحد F_n ، عددی بزرگتر از n است و از آنجا $(n,F_n)=1$ می‌شود .

b) بسادگی می‌شود که برای $n=1,2,3,4,5$ داریم : $(n,2^n-1)=1$ و $(6,2^6-1)=3$. بنابراین کوچکترین جواب n برای سؤال مسئله ، $n=6$ است .

سپس، چون 2^6-1 بر 3 و $2^{6k}-1$ بر 2^6-1 قابل قسمت است $(k=1,2,\ldots)$ ،نتیجه می‌گیریم: $(6k,2^{6k}-1) \geqslant 3$ برای $k=1,2,\ldots$.

۴۵ . عددهای $2k+1$ و $9k+4$ نسبت بهم اولند ، زیرا داریم: $(2k+1)9-(9k+4)2=1$. چون داریم :

$$2k-1=2(k+8)-17 \quad , \quad 9k+4=4(2k-1)+(k+8)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$(۹k+۴,۲k-۱)=(۲k-۱,k+۸)=(k+۸,۱۷)$$

اگر $k\equiv ۹(\mathrm{mod}۱۷)$ باشد ، $(k+۸,۱۷)=۱۷$ می‌شود . در غیر اینصورت هم $k+۸$ بر ۱۷ قابل‌قسمت نیست و $(k+۸,۱۷)=۱$ می‌شود. بنابراین بشرطی که $k\equiv ۹(\mathrm{mod}۱۷)$ باشد $(۹k+۴,۲k-۱)=۱۷$ و در غیر اینصورت $(۹k+۴,۲k-۱)=۱$ خواهد بود .

۴۶ . ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر m عدد مثلثی (m عدد ی است طبیعی) $a_۱<a_۲<\cdots<a_m$ ، دو به دو نسبت بهم اول باشند ، عدد مثلثی $t>a_m$ وجود دارد ، بنحوی که داشته باشیم :

$$(t,a_۱a_۲\cdots a_m)=۱$$

فرض می‌کنیم $a=a_۱a_۲\cdots a_m$ باشد ؛ عددهای $a+۱$ و $۲a+۱$ نسبت به a اولند. عدد :

$$a_{m+۱}=t_{۲a+۱}=\frac{(۲a+۱)(۲a+۲)}{۲}=(a+۱)(۲a+۱)$$

عددی مثلثی و بزرگتر از a_m است و ضمناً نسبت به a و بنابراین نسبت بهریك از عددهای $a_۱,a_۲,\cdots,a_m$ اول است .

ازاینجانتیجه می‌شود که اگر یك دنبالهٔ صعودی ومحدود از عددهای مثلثی داشته باشیم ، بنحوی که دو به دو نسبت بهم اول باشند ، همیشه می‌توانیم عدد مثلثی بزرگتر از عددهای این دنباله پیدا کنیم که نسبت بهر یك از آنها اول باشد .

با انتخاب کوچکترین این عددها ، دنبالهٔ نامحدود:

$$t_۱=۱,t_۲=۳,t_۴=۱۰,t_{۱۳}=۹۱,t_{۲۲}=۲۵۳,\cdots$$

از عددهای مثلثی بدست می‌آید که دو به دو نسبت بهم اولند .

b) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر برای هر عدد طبیعی m، عددهای بشکل چهار وجهی $a_m > \cdots > a_2 > a_1$ وجود داشته باشد ، که دوبه‌دو نسبت بهم اول باشند ، در اینصورت عدد چهار وجهی T وجود دارد ، بنحوی‌که داشته باشیم :

$$(T, a_1 a_2 \cdots a_m) = 1$$

فرض می‌کنیم $a = a_1 a_2 \cdots a_m$ باشد ؛ عدد :

$$T = T_{6a+1} = (6a+1)(3a+1)(2a+1)$$

نسبت به a اول است وبنابراین نسبت بهر یك ازعددهای $a_1, a_2, \ldots, a_m$ اول می‌شود و ضمناً داریم : $T > a \geqslant a_m$.

به‌این‌ترتیب دنبالهٔ صعودی نامحدود ازاعداد به‌شکل چهاروجهی، که دو به دو نسبت بهم‌اول باشند ، به‌کمك‌استقراء ریاضی‌بدست می‌آید. اگر به عنوان اولین عضو آن $T_1 = 1$ انتخاب‌کنیم ، وقتی‌که (به ازای عدد طبیعی و مفروض m) m عدد چهار وجهی و دو به دو نسبت بهم اول داشته باشیم ، به عنوان عضو $(m+1)$ ام ، کوچکترین عدد چهار وجهی را می‌گیریم‌که از m بزرگتر ونسبت بهر یك از m عدد دنباله، اول باشد . به‌این‌ترتیب دنبالهٔ صعودی نامحدودی ازعددهای چهاروجهی بدست می‌آیدکه هر یك از آنها نسبت به بقیه اول هستند :

$$T_1 = 1, T_2 = 4, T_5 = 35, T_{17} = 969, \ldots$$

۴۷ . a و b را دوعدد صحیح مختلف و $a < b$ می‌گیریم ؛ اگر $n = (b-a)k + 1 - a$ باشد ، وقتی k به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب شود ، $a + n$ عددی طبیعی می‌شود ؛ عددهای : $1 + (b-a)k + 1$

و $b+n=(b-a)(k+1)+1$ هم طبیعی هستند . اگر $a+n$ و $b+n$ بر d قابل قسمت باشند ، $b-a$ هم بر d قابل قسمت می‌شود ودراینصورت ازقابل قسمت بودن $a+n=(b-a)k+1$ بر d نتیجه می‌شودکه $d=1$ است . به این ترتیب داریم :

$$(a+n,b+n)=1$$

۴۸ . چون a ، b و c عدد های صحیح مختلف اند ، عدد $h=(a-b)a-c)(b-c)$ عددی‌صحیح ومخالف صفر و ± 1 می‌شود. $q_1, q_2, \ldots, q_s$ را همهٔ‌عددهای اول بزرگتر از۳ می‌گیریم که‌مقسوم‌علیه عدد h باشند .

اگر لااقل دو عدد از a ، b و c زوج باشند $r=1$ و در غیر اینصورت $r=0$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت واضح است که لااقل دو تا از عددهای $a+r$ ، $b+r$ و $c+r$ فرد خواهند شد .

اگر a، b و c در تقسیم بر۳ باقیمانده‌های مختلف بدهند $r_0=0$ واگر لااقل‌دو تا ازعددهای a، b و c در تقسیم بر۳ ، باقیمانده‌ای مساوی ρ بدهند $r_0=1-\rho$ فرض‌می‌کنیم ، در اینصورت واضح است که درهر حالت‌لااقل دوتا ازعددهای $a+r_0$ ، $b+r_0$ و $c+r_0$ غیر قابل‌قسمت بر ۳ می‌شوند .

حالا اگر i یکی‌ازعددهای $1, 2, \ldots, s$ فرض‌کنیم ، چون $q_i>3$ است ، با توجه به مسئلهٔ ۴۳ ، عدد صحیح r_i وجود دارد ، بنحوی‌که هیچیك ازعددهای $a+r_i$ ، $b+r_i$ و $c+r_i$ بر q_i قابل‌قسمت نباشند.

بر اساس قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها [۷] نتیجه می‌گیریم که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که داشته باشیم :

$$n\equiv r(\mathrm{mod}\,۲), n\equiv r_۰(\mathrm{mod}\,۳), n\equiv r_i(\mathrm{mod}\,q_i) \quad (i=۱,۲,\cdots,s)$$

دراینصورت عدد اول q پیدا می‌شود، طوری‌که $a+n$ و $b+n$ وازآنجا $a-b$، یعنی h بر q قابل‌قسمت‌می‌شود و $h\neq\pm۱$. چون $n\equiv r(\mathrm{mod}\,۲)$ و چون لااقل دو تا از عددهای $a+r$ ، $b+r$ و $c+r$ فرد هستند ، در اینصورت لااقل دو تا از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ هم فرد می‌شود و بنابراین $q\neq۲$ است . چون $n\equiv r_۰(\mathrm{mod}\,۳)$ و لااقل دوتا از عددهای $a+r_۰$ ، $b+r_۰$ و $c+r_۰$ غیر قابل قسمت بر ۳ هستند، در اینصورت لااقل دو تا از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ هم غیرقابل قسمت بر ۳ می‌شوند و بنابراین $q\neq۳$ است . سپس چون q یکی از مقسوم‌علیه‌های اول عدد h است، می‌توان فرض کرد $q=q_i$. (i می‌تواند یکی از عدد های $۱,۲,\ldots,s$ باشد) ، ولی در اینصورت با توجه به $n\equiv r_i(\mathrm{mod}\,q_i)$ یا $n\equiv r_i(\mathrm{mod}\,q)$ و اینکه هیچیك از عدد های $a+r_i$ ، $b+r_i$ و $c+r_i$ بر q_i قابل قسمت نیستند ، نتیجه می‌شودکه هیچیك از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ بر q_i یا q قابل قسمت نیستند ، درحالیکه‌فرض‌کرده‌بودیم $a+n$ و $b+n$ بر q قابل‌قسمت‌اند به‌این‌ترتیب ثابت‌کردیم‌که $(a+n,b+n)=۱$.

بهمین‌ترتیب‌ثابت‌می‌کنیم $(a+n,c+n)=۱$ و $(b+n,c+n)=۱$ است ، یعنی $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ دوبه‌دو نسبت بهم اولند . چون تعداد عددهای طبیعی n ،که‌به‌این ترتیب انتخاب‌کردیم ، بی‌نهایت‌زیاد

است ، مسئله را می‌توان ثابت شده بحساب آورد .

۴۹. مثلاً $a=۱$ ، $b=۲$ ، $c=۳$ و $d=۴$ دارای این خاصیت‌اند. در حقیقت وقتی n عددی فرد باشد ، $a+n$ و $c+n$ زوج می‌شوند و بنابراین نسبت بهم اول نیستند ، و وقتی n عددی زوج باشد ، $b+n$ و $d+n$ زوج می‌شوند و نسبت بهم اول نیستند .

۵۰ . اگر n عددی فرد و بزرگتر از ۶ باشد داریم: $n=۲+(n-۲)$ ، ضمناً $n-۲$ عددی است فرد و بزرگتر از واحد و داریم: $(n-۲,۲)=۱$.

برای حالتی که $n>۶$ عددی زوج باشد، اثبات **آ.مونکوسکی** را می‌آوریم .

اگر $n=۴k$ باشد ، k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است (زیرا $n>۶$ بود) ، در اینصورت $n=(۲k-۱)+(۲k+۱)$ و ضمناً $۲k+۱>۲k-۱>۱$ (چون $k>۱$ بود) می‌شود ، عددهای $۲k-۱$ و $۲k+۱$ دو عدد فرد متوالی و بنابراین نسبت بهم اولند .

اگر $n=۴k+۲$ باشد ، k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است (چون $n>۶$ است) ؛ دراینصورت $n=(۲k-۱)+(۲k+۳)$ و ضمناً $۲k+۳>۲k-۱>۱$ (چون $k>۱$ است) می‌شود. عددهای $۲k+۳$ و $۲k-۱$ نسبت بهم اولند ، زیرا اگر $۲k+۳$ و $۲k-۱$ بر d قابل قسمت باشند ، $(۲k+۳)-(۲k-۱)=۴$ هم بر d قابل قسمت می‌شود و چون d مقسوم‌علیه عددی فرد است ، باید عددی فرد باشد، یعنی $d=۱$ می‌شود و نتیجه می گیریم :

$$(۲k+۳,۲k-۱)=۱$$

* ۵۱ . وقتی n عددی زوج و بزرگتر از ۸ باشد ، بیکی از سه صورت $n=6k$ ، $n=6k+2$ یا $n=6k+4$ است، ضمناً دردوحالت اول k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد و در حالت سوم ، عددی طبیعی است . از روابط :

$$6k=2+3+[6(k-1)+1]\ ,\ 6k+2=3+4+[6(k-1)+1]$$

$$6k+4=2+3+(6k-1)$$

بسادگی نتیجه می‌شودکه n مساوی مجموع سه عدد طبیعی بزرگتر ازواحد است‌که دوبه‌دو نسبت بهم اولند .

حالا فرض‌کنید ، n عددی فرد وبزرگتر از۱۷ باشد . شش‌حالت پیش می‌آید :

$$n=12k+1,12k+3,12k+5,12k+7,12k+9,12k+11$$

ضمناً در سه حالت اول ، k عددی طبیعی وبزرگتراز واحد ودرسه‌حالت بقیه ، k عددی طبیعی است . داریم :

$$12k+1=[6(k-1)-1]+[6(k-1)+5]+9$$

که در آن عددهای $6(k-1)-1$ ، $6(k-1)+5$ و ۹ بزرگتر از واحد و دوبه‌دو نسبت بهم اولند ، زیرا دو عدد اول غیرقابل قسمت بر۳ و نسبت بهم اولند (زیرا اگر این دو عدد مقسوم علیه مشترکی داشته باشند ، باید تفاضل آنها ، یعنی۶ ، بر این‌مقسوم‌علیه مشترك قابل‌قسمت باشد ، در حالیکه‌این دو عدد فرد و غیر قابل‌قسمت بر ۳ هستند).برای حالتهای بعدی داریم :

$$n=12k+3=(6k-1)+(6k+1)+3;$$

$$n=۱۲k+۵ =(۶k-۵)+(۶k+۱)+۹ ;$$

$$n=۱۲k+۷ =(۶k+۵)+(۶k-۱)+۳ ;$$

$$n=۱۲k+۹ =(۶k-۱)+(۶k+۱)+۹ ;$$

$$n=۱۲k+۱۱=[۶(k+۱)-۵]+[۶(k+۱)+۱]+۳$$

در هر یك از این حالتها ، سه عدد بزرگتر از واحد بدست می‌آید، که دو به دو نسبت بهم اولند .

عدد ۱۷ دارای این خاصیت نیست، زیرا اگر $a+b+c=۱۷$ باشد ، هرسه عدد a، b و c (بزرگتر از واحد و دوبه‌دونسبت بهم اول) باید فرد ومختلف باشند . داریم :

$$۳+۵+۷=۱۵<۱۷ \quad ۳+۵+۱۱=۱۹>۱۷$$

و در حالتی که $۳<a<b<c$ باشد $a\geqslant ۵$ ، $b\geqslant ۷$ ، $c\geqslant ۹$ می‌شود و از آنجا :

$$a+b+c\geqslant ۵+۷+۹\geqslant ۲۱>۱۷$$

یعنی ۱۷ را نمی‌توان به مجموع سه عدد فرد مختلف وبزرگتر از واحد تجزیه‌کرد .

۵۲* . اثبات را با الهام از فکر **شینتسل** می‌آوریم :

k را عدد مفروض‌طبیعی و m را عددی‌طبیعی می‌گیریم‌که تجزیهٔ آن به عوامل اول بصورت زیر باشد :

$$m=q_۱^{\alpha_۱}\cdot q_۲^{\alpha_۲}\cdots q_s^{\alpha_s}$$

$f(x)=x(x+۲k)$ و i را یکی از عددهای $۱،۲،\ldots،s$ فرض می‌کنیم.

فرض قابل قسمت بودن $x(x+2k)$ بر q_i (به‌ازای همهٔ مقادیر x) به تناقض بر خورد می‌کند ، زیرا به ازای $x=1$ باید $2k+1$ و به ازای $x=-1$ باید $2k-1$ بر q_i قابل قسمت باشد ، یعنی به‌این‌ترتیب‌باید $(2k+1)-(2k-1)=2$ بر q_i قابل قسمت بشود و چون $2k+1$ و $2k-1$ ، عددهائی فرد هستند ، باید ۱ بر q_i قابل قسمت باشد که ممکن نیست . بنابراین عدد صحیح x_i وجود دارد ، بنحوی که $f(x_i)=x_i(x_i+2k)$ بر q_i قابل قسمت نباشد .

براساس قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ، عدد طبیعی x_0 وجود دارد ، بنحوی‌که $x_0\equiv x_i(\mathrm{mod}\,q_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ باشد ،که‌ازآنجا نتیجه می‌شودکه $f(x_0)\equiv f(x_i)$ درتقسیم بر q_i باقیمانده‌ای مخالف‌صفر دارد .

به‌این ترتیب ، برای $i=1,2,\cdots,s$ داریم : $(f(x_0),q_1)=1$ ، ازآنجا ، با در نظرگرفتن تجزیهٔ عدد m به‌عوامل اول،بدست می‌آید :

$$(f(x_0),m)=1 \quad\Longrightarrow\quad (x_0(x_0+2k),m)=1$$

بنابراین اگر $b=x_0$ ، $a=x_0+2k$ بگیریم ، داریم : $2k=a-b$ ، که درآن $(a,m)=1$ و $(b,m)=1$ است .

تبصره. اگر به عددهای a و b ، مضربی از عدد m را اضافه کنیم ، برای عدد $2k=a-b$ ، صورت جدیدی از تفاضل دو عدد طبیعی بدست می‌آید ،که نسبت به m اولند . به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود که هر عدد زوج را به‌بی‌نهایت طریق می‌توان به‌تفاضل دوعدد طبیعی‌تبدیل‌کرد، بطوریکه هر یك از آنها نسبت به عدد طبیعی m اول باشند .

ما نمی‌دانیم که آیا هر عدد زوج را می‌توان بصورت تفاضل دوعدد اول نشان داد . ازیك فرضیهٔ شینتسل می‌توان نتیجه گرفت که هر عدد زوج را به بی‌نهایت طریق می‌توان بصورت تفاضل دو عدد اول نشان داد .

۵۳* . اثبات **روتکه‌ویچ** را می‌آوریم :

اگر U_n را n امین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناچی و m و n را دوعدد طبیعی بگیریم، داریم : $(U_m,U_n)=U_{(m,n)}$. بنابراین جمله‌های دنبالهٔ نامحدود:

$$U_{p_1},U_{p_2},U_{p_3},\cdots$$

دو به دو نسبت بهم اولند . ضمناً p_k را می‌توان $2^{2^k}+1$ انتخاب کرد، زیرا برای عددهای طبیعی m,n که $n\neq m$ داریم: $(2^{2^m}+1,2^{2^n}+1)=1$.

۳ . تصاعدحسابی

۵۴ . m را عدد طبیعی مفروضی بزرگتر از واحد فرض کنید . عددهای $m!k+1$ $(k=1,2,\cdots,m)$ دو به دو نسبت بهم اولند ، زیرا اگر برای عددهای طبیعی l,k $(k<l\leqslant m)$ ، عدد $d>1$ مقسوم‌علیه مشترك دو عدد $m!k+1$, $m!l+1$ باشد ، در اینصورت باید عدد $l(m!k+1)-k(m!l+1)=l-m<m$ بر d قابل قسمت باشد، و چون $1<d<m$ است ، $m!$ بر d قابل قسمت می‌شود و با توجه به اینکه $m!k+1$ بر d قابل قسمت بود ، باید 1 بر d قابل قسمت باشد که با فرض $d>1$ مغایر است .

۵۵ . مثلاً تمام جمله‌های تصاعد حسابی 2^kt+2^{k-1} (که درآن $t=0,1,2,\cdots$ است) دارای این خاصیت هستند ، زیرا در تجزیهٔ عدد

$n=۲^k t+۲^{k-۱}$ به عوامل اول ، عدد۲ با نمای $k-۱$ ظاهرمی‌شود. ازآنجا به‌کمك رابطهٔ مربوط به تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یك عدد، نتیجه می‌شودکه تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n بر k قابل قسمت‌است .

۵۶ . مثلاً برای هر عدد طبیعی x ، $y=۵x+۲, z=۷x+۳$ ، این خاصیت وجود دارد، زیرا دراینصورت عددهای ؛

$$x(x+۱)=x^۲+x, y(y+۱)=۲۵x^۲+۲۵x+۶,$$
$$z(z+۱)=۴۹x^۲+۴۹x+۱۲$$

یك تصاعد حسابی به قدرنسبت $۲۴x^۲+۲۴x+۶$ تشکیل‌می‌دهند .

تبصره. می‌توان ثابت‌کردکه چهار عدد طبیعی $x<y<z<t$ وجود ندارد ، بطوریکه $x(x+۱), y(y+۱), z(z+۱), t(t+۱)$ تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند . در حقیقت ، اگراین عددها به تصاعد حسابی باشند، وقتی‌که به‌چهار برابر هر یك از آنها یك واحد اضافه‌کنیم ، که دراینصورت عددهای $(۲x+۱)^۲, (۲y+۱)^۲, (۲z+۱)^۲, (۲t+۱)^۲$ بدست می‌آید، که‌بازهم باید یك تصاعد حسابی داشته باشیم؛ ولی طبق‌قضیهٔ فرما ، نمی‌توان چهار مجذورکامل پیداکرد ، طوری‌که به تصاعد حسابی باشند .

از مسئلهٔ ۵۶ نتیجه‌می‌شودکه‌بی‌نهایت تصاعد حسابی می‌توان‌یافت که از سه عدد مثلثی تشکیل شده باشد . همچنین می‌توان ثابت کردکه بی‌نهایت تصاعد هندسی صعودی وجود داردکه از سه عدد مثلثی تشکیل شده باشند . مثلاً تصاعدهای زیر :

$$t_۱=۱, t_۳=۶, t_۸=۳۶ \quad ; \quad t_۸=۶^۲, t_{۲۰}=۶\cdot۳۶, t_{۴۹}=۳۵^۲;$$
$$t_{۴۹}=۳۵^۲, t_{۸۴}=۳۵\cdot۲۰۴, t_{۲۸۸}=۲۰۴^۲$$

۵۷ . اگر اضلاع مثلث فیثاغورثی[۱] ، تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند ، می‌توانیم آنها را به $b-r$ ، b و $b+r$ نشان دهیم (r,b عددهای طبیعی هستند) ، طوری‌که $(b-r)^2+b^2=(b+r)^2$ باشد ، از آنجا $b=4r$ می‌شود . در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌اضلاع $3r$ ، $4r$ و $5r$ بدست می‌آید که r می‌تواند هر عدد طبیعی دلخواهی باشد . بنابراین ، هر مثلث فیثاغورثی ،که اضلاع آن به تصاعد حسابی باشند، از ضرب اضلاع مثلث ۵،۴،۳ در یك عدد طبیعی بدست می‌آید[۲] .

۵۸ . عددهای مثلثی $t_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ، برای $n=4u+1$ ($u=0,1,2,\dots$) فرد و برای $n=4u$ ($u=1,2,\dots$) زوج‌اند . بنابراین هر یك از دو تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ (که یکی از عددهای زوج و دیگری ازعددهای فرد تشکیل‌شده‌است) شامل بی‌نهایت عدد مثلثی هستند. تصاعد $3k+2$ ($k=0,1,2,\dots$) شامل‌حتی یك‌عدد مثلثی نیست ، زیرا هر یك از جمله های این تصاعد در تقسیم بر ۳ باقیماندهٔ ۲ را می‌دهند ، در حالیکه‌برای‌عددهای‌مثلثی ، اگر n مضربی

---

۱) فیثاغورثی به‌مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌گویندکه همهٔ اضلاع‌آن باعددهای طبیعی قابل بیان باشد .

۲) از حل مسئله دیده می‌شود که هر مثلثی‌که این شرایط را داشته باشد ، با مثلث به اضلاع ۵،۴،۳ متشابه است . طبعاً سؤالی پیش می‌آید : آیا عکس این حکم صحیح است ، یعنی همهٔ اینگونه مثلثها در شرط مسئله صدق می‌کنند . واضح است‌که چون انتخاب واحد به‌دلخواه انجام می‌گیرد، بنابراین شرط صحیح بودن عدد اضلاع‌مثلث ، لزومی ندارد و جواب برای هر مقدار مثبت و حقیقی b و r صحیح است .

از ۳ یا $n=3u+2$ $(u=0,1,2,\dots)$ باشد ، t_n بر ۳ قابل قسمت می‌شود و اگر $n=3u+1$ باشد $(u=0,1,2,\dots)$ ، خواهیم داشت: $t_n=9\frac{u(u+1)}{2}+1$ و بنابراین باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۳مساوی ۱ خواهد بود .

۵۹ . لازم‌وکافی است‌که b باقیماندهٔ‌تقسیم‌مجذورکاملی بر a باشد، در حقیقت ، اگر به ازای عدد طبیعی x و عدد صحیح $k\geqslant 0$ داشته باشیم $x^2=ak+b$ ، خواهیم داشت : $x^2\equiv b(\mathrm{mod}\ a)$ و b باقیماندهٔ تقسیم مجذور کاملی بر a است . برعکس اگر b باقیماندهٔ تقسیم مجذور کاملی بر a باشد ، بی‌نهایت عدد طبیعی x وجود دارد که داشته باشیم : $x^2\equiv b(\mathrm{mod}\ a)$، بنابراین $x^2=ak+b$ ، که در آن k عددی است صحیح و (وقتی x به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد) طبیعی.

۶۰* . اثبات **شینتسل** را می‌آوریم .

p_k را k امین عدد اول فرض می‌کنیم . s را عدد طبیعی دلخواه و $P=p_1p_2\cdots p_s$ می‌گیریم . طبق قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها، برای هر عدد طبیعی $k\leqslant s$ ، عدد طبیعی a_k وجود دارد ، بنحوی که $a_k\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \frac{P}{p_k}\right)$ و $a_k\equiv -1(\mathrm{mod}\ p_k)$ باشد . فرض می‌کنیم : $Q=1^{\alpha_1}.2^{\alpha_2}\cdots s^{\alpha_s}$. واضح است که عددهای $kQ\ (k=1,2,\dots,s)$ تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی ، شامل s جمله. می‌دهد ، ازتعریف عدد $a_k\ (k=1,2,\dots,s)$ نتیجه می‌شود که a_k+1 بر p_k و a_n بر p_k قابل قسمت است ، برای $k\neq n$ ، که n عددی طبیعی و کوچکتر یا مساوی s است ،

به این ترتیب عددهای

$$Q_k = k^{\frac{a_k+1}{p_k}} \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{s} n^{\frac{a_n}{p_k}}$$

طبیعی هستند و بسادگی می‌توان تحقیق کرد که برای $k=1,2,\dots,s$ ، عددهای kQ توانی از یك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر ازواحدند.

۶۱ . قضیه‌ای‌که باید ثابت‌کنیم، هم‌ارز با قضیه‌ای است‌که برطبق آن در هر تصاعد حسابی صعودی و نامحدود ، که از عددهای طبیعی تشکیل شده است، جمله‌هایی وجود داردکه‌توان یك عدد طبیعی بانمای طبیعی بزرگتر از واحد نیستند . فرض‌کنید $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ تصاعد حسابی نامحدودی باشد (a و b عددهای طبیعی هستند) .

عدد اول $p>a+b$ همیشه وجود دارد .

چون $(a,p^2)=1$ است، معادلهٔ $ax-p^2y=1$ برای‌عددهای طبیعی x و y دارای‌جواب می‌باشد . $k=(p-b)x$ می‌گیریم ؛ روشن است کـه این عدد و عدد $ak+b=p^2y(p-b)+p$ طبیعی هستند (زیرا $p>b$ است) ؛ به‌این ترتیب جملهٔ $ak+b$ از تصاعدما برعدد p قابل قسمت است ، ولی بر p^2 قابل قسمت نیست و بنابراین نمی‌تواند توانی از یك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۲ . از چهار عدد طبیعی متوالی ، یکی بصورت $4k+2$ است ($k\geq 0$ عددی صحیح است) واین عددزوج‌است ، ولی بر ۴ قابل قسمت

نیست و نمی‌تواند توانی از یك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

تبصره . آ . مونکوسکی ثابت‌کردکه سه عدد طبیعی متوالی وجود ندارد ، بنحوی که هر یك از آنها توانی از یك عدد طبیعی با نمای‌بزرگتر از واحد باشد ؛ اثبات این قضیه مشکل است . ولی دو عدد طبیعی متوالی وجود داردکه هرکدام از آنها توانی از یك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشند ، مثل $۸ = ۲^۳$ و $۹ = ۳^۲$. سئوال **کاتالان** هنوز مطرح است‌که آیا دو عدد متوالی دیگر با این خاصیت وجود دارد یا نه .

آ.روتکه‌ویچ ثابت‌کردکه اگردوتوان عددهای‌طبیعی غیر از ۸و۹ ، نمای بزرگتر از واحد داشته باشند و اختلاف دونما یك واحد باشد ، هردوی این عددهای طبیعی از ۱۰۰۰ بزرگترند . روتکه‌ویچ همچنین ثابت کردکه اگر عددهای صحیح بزرگتر از واحد x و y ، و عددهای اول z و t در معادلهٔ $x^z - y^t = ۱$ صدق‌کنند (بشرطی که جواب $x = ۳ ، y = ۲ ، z = ۳$ $t = ۲$ را به‌حساب‌نیاوریم) ، $x > ۱۰^۶$ و $y > ۱۰^۶$ خواهد بود .

۶۳ . این قضیه را می‌توان مستقیماً از مسئلهٔ ۶۰ نتیجه گرفت ، ولی اثبات ساده‌تری‌هم برای آن وجود دارد . m را عددطبیعی‌مفروض‌و بزرگتر از واحد و q_i $(i = ۱,۲,\cdots,m)$ را عددهای اول با شرط $a < q_۱ < q_۲ < \cdots < q_m$ فرض می‌کنیم .

بنابرقضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ، عدد طبیعی x وجود دارد، بنحوی‌که $ax \equiv -b - aj \pmod{q_j^۲}$ $(j = ۱,۲,\cdots,m)$ باشد . ازآنجا $a(x+j)+b$ بر $q_j^۲$ قابل قسمت می‌شود (برای $j = ۱,۲,\cdots,m$) و بنابراین m جملهٔ‌متوالی‌تصاعد $ak+b$، یعنی‌جمله‌های $a(x+j)+b$

به‌ازای $j=1,2,\cdots,m$ ، عددهائی مرکب هستند .

۶۴* . واضح است که می‌توان m را عدد طبیعی بزرگتر ازواحد در نظرگرفت . حاصلضرب همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول و مختلف عدد mرا که ضمناً مقسوم‌علیه‌های عدد a هم باشند ، P فرض می‌کنیم و درحالتی که‌چنین مقسوم‌علیه‌هایی وجودنداشته باشد $P=1$ می‌گیریم.حاصلضرب مقسوم‌علیه‌های اول ومختلف عدد m را ،که ضمناً جزومقسوم‌علیه‌های عدد b هم باشند، Q و اگر چنین‌عددهائی وجود نداشته باشند $Q=1$ می‌گیریم . چون $(a,b)=1$ است ، $(P,Q)=1$ می‌شود . بالاخره R راحاصلضرب‌مقسوم‌علیه‌های‌اولی‌ازعدد m می‌گیریم‌که‌بین‌مقسوم‌علیه‌های عددهای a و b وجود نداشته باشند ، و اگر چنین مقسوم‌علیه‌هائی‌وجود نداشته باشد $R=1$ می‌گیریم.واضح‌است‌که $(R,P)=1$ و $(R,Q)=1$ است .

حالا ثابت می‌کنیم $(aPR+b,m)=1$ است . در حقیقت اگر چنین‌نباشد، عدد اول p پیدا می‌شود ، بنحوی‌که‌هم m و هم $aPR+b$ بر آن قابل قسمت باشند . اگر P بر p قابل قسمت باشد ، باید b و در نتیجه Q بر p قابل قسمت باشد که مغایر رابطهٔ $(P,Q)=1$ است . اگر فرض‌کنیم که Q بر p قابل قسمت است ، دراینصورت b بر p یعنی aPR بر p قابل قسمت است ، که ممکن نیست ، زیرا $(a,b)=1$ ، $(b,P)=1$ و $(b,R)=1$ است . بالاخره اگر فرض‌کنیم R بر p قابل قسمت است ، در اینصورت b بر p ، یعنی Q بر p قابل قسمت‌می شود کـه مغایر با $(P,Q)=1$ است .

به‌این ترتیب ثابت کردیم که $(aPR+b,m)=1$ است . از آنجا نتیجه می‌شود :

$$(a(km+PR)+b,m)=1 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

یعنی در تصاعد ما ، بی‌نهایت جمله وجود دارد که هرکدام از آنها نسبت به m اولند .

۶۵ . b را جملهٔ اول و **a** را قدر نسبت تصاعد و **a** و **b** را دو عدد طبیعی می‌گیریم . اگر **r** را باقیماندهٔ تقسیم **b** بر **a** فرض کنیم ، داریم : $b=at+r$ ، که در آن $t\geqslant 0$ عددی صحیح و **r** عددی صحیح و ضمناً $0\leqslant r<a$ است . **s** را عدد طبیعی دلخواه و $c_1, c_2, \cdots, c_s$ را دنبالهٔ دلخواهی از رقمها ، در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰، می‌گیریم و ضمناً $c_1\neq 0$. **N** را عدد **s** رقمی فرض می‌کنیم که ردیف رقمهای آن $(c_1, c_2, \cdots, c_s)$ باشد .

واضح است که عدد طبیعی **n** وجود دارد، بنحوی که $10^n>2a(t+1)$ و $\frac{N.10^n}{a}-t>1$ باشد .

k را کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از $\frac{N.10^n}{a}-t$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت $k-1\leqslant\frac{N.10^n}{a}-t$ می‌شود و بنابراین ، چون $10^n>2a$ است داریم :

$$k+1\leqslant\frac{N.10^n}{a}+2-t<\frac{(N+1)10^n}{a}-t$$

به این ترتیب داریم :

$$N.10^n<a(k+t)\leqslant ak+at+r=ak+b<a(k+t+1)<$$
$$<(N+1)10^n=N.10^n+10^n$$

از آنجا نتیجه می‌شود که s رقم اول $ak+b$ بر s رقم اول عدد N ، یعنی $c_1, c_2, \ldots, c_s$ منطبق است .

۶۶ . اگر جمله‌های u_k ، u_l و u_m از دنبالهٔ فیبوناچی تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی بدهند ، باید $l>2$، $u_l>1$ (زیرا $u_2=1$ است) ، $m>3$ و $u_m=u_l+(u_l-u_k)$ باشد ، از آنجا

$$u_m<u_l+u_l<u_l+u_{l+1}=u_{l+2} \quad \Longrightarrow \quad u_m<u_{l+2}$$

بنابراین $u_m\leqslant u_{l+1}$ می‌شود و چون $u_m>u_l$ بود $u_m\geqslant u_{l+1}$، یعنی $u_m=u_{l+1}$ می‌شود، ازآنجا ($l>2$ چون است) $m=l+1$ می‌شود. بنابراین داریم :

$$u_k=2u_l-u_m=u_l-(u_{l+1}-u_l)=u_l-u_{l-1}=u_{l-2}$$

و در نتیجه $k=l-2$ می‌شود .

به‌این‌ترتیب ، اگرجمله‌های u_k ، u_l ، و u_m ازدنبالهٔفیبوناچی، تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی بدهند . باید $l>2$، $k=l-2$ و $m=l+1$ باشد . از طرف دیگر ، بسادگی می‌توان تحقیق کردکه‌اگر $l>2$ باشد ، عددهای u_{l-2} ، u_l و u_{l+2} یك تصاعد حسابی با قدر نسبت u_{l-1} تشکیل می‌دهند .

فرض‌کنید ، n عددی طبیعی وبزرگتراز $l+1$ باشد.دراینصورت $n\geqslant l+2$ و از آنجا $u_n\geqslant u_{l+2}$ و (چون $l>2$ است) داریم :

$$u_n - u_{l+1} \geqslant u_{l+2} - u_{l+1} = u_l > u_{l-1}$$

بنابراین هیچ تصاعد حسابی چهار جمله‌ای ازعددهای فیبوناچی نمی‌توان تشکیل داد .

۶۷* . میدانیم‌که اگر m عددی طبیعی باشد، باقیماندده‌های‌تقسیم عددهای دنبالهٔ فیبوناچی بر m ، دنبالهٔ‌متناوبی با تناوب ساده[۱] ، تشکیل می‌دهند.از تقسیم‌عددهای‌دنبالهٔ‌فیبوناچی برعددهای: $m = ۲,۳,۴,۵,۶,۷$ بترتیب باقیمانده‌های زیر بدست می‌آید (در اینجا چند جملهٔ اول هر یك ازاین دنباله‌ها را نوشته‌ایم، ونه همهٔ جمله‌های یك دورهٔ تناوب را):

$m = ۲$: ۱,۱,۰,...

$m = ۳$: ۱,۱,۲,۰,...

$m = ۴$: ۱,۱,۲,۳,۱,۰,...

$m = ۵$: ۱,۱,۲,۳,۰,۳,۳,۱,۴,...

$m = ۶$: ۱,۱,۲,۳,۵,۲,۱,۳,۴,۱,۵,۰,...

$m = ۷$: ۱,۱,۲,۳,۵,۱,۶,۰,۶,۶,۵,۴,۰ .

چون برای هر عدد طبیعی $m \leqslant ۷$ ، در تقسیم عددهای‌فیبوناچی بر m ، همهٔ باقیمانده‌های ممکن وجود دارد، نتیجه می‌گیریم‌که در هر تصاعد حسابی با قدر نسبت $m \leqslant ۷$ ، بی‌نهایت عدد فیبوناچی وجوددارد.

حالا ثابت می‌کنیم‌که تصاعد $۸k + ۴$ ($k = ۰,۱,۲,...$) ، شامل هیچیك از عددهای دنبالهٔ فیبوناچی نیست .

---

۱) تبصرهٔ [۴] را در ضمیمه‌های آخرکتاب ببینید .

در دنبالهٔ فیبوناچی داریم: $u_1 = u_2 = 1$ و $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ ، بسادگی معلوم می‌شود که در تقسیم عددهای $u_1, u_2, \ldots, u_{14}, \ldots$ بر ۸ بترتیب باقیمانده‌های زیر بدست می‌آید :

$$1,1,2,3,5,0,5,5,2,7,1,0,1,1$$

از اینجا دیده می‌شود که $u_{13} - u_1$ و $u_{14} - u_2$ بر ۸ قابل‌قسمت است . بنابراین می توان گفت که به ازای $n = 1$، $u_{n+12} - u_n$ و $u_{n+13} - u_{n+1}$ بر ۸ قابل قسمت است .

حالا فرض می‌کنیم که خاصیت اخیر به ازای مقداری از n وجود داشته باشد ؛ در اینصورت $u_{n+12} + u_{n+13} - (u_n + u_{n+1})$ ، یعنی $u_{n+14} - u_{n+2}$ بر ۸ قابل قسمت است . بنابراین ثابت شد که اگر $u_{n+12} - u_n$ و $u_{n+13} - u_{n+1}$ بر ۸ قابل قسمت باشند ، $u_{n+14} - u_{n+2}$ هم بر ۸ قابل‌قسمت می‌شود . به‌این ترتیب ثابت می‌شود که دنبالهٔ باقیمانده‌های فیبوناچی بر ۸ ، دنباله‌ای متناوب با دورهٔ تناوب سادهٔ دوازده جمله‌ای است .

اگر به ۱۲ جملهٔ اول دنبالهٔ باقیمانده‌های عددهای فیبوناچی بر ۸ ، توجه‌کنیم ، می‌بینیم که تنها عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷ وجود دارد . چون بین این باقیمانده‌ها ، عددهای ۴ و ۶ وجود ندارد ، تصاعدهای $8k+4$ و $8k+6$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ ، شامل هیچیك ازعددهای دنبالهٔ فیبوناچی نیست . و واضح است که این تصاعدها (که از عددهای طبیعی تشکیل‌شده‌اند) ، حداقل قدر نسبت را ، درمورد شرایط مسئله ، دارا می‌باشد .

۶۸* . مثلاتصاعد $11k+4$ $(k=0,1,2,\cdots)$ دارای این‌خاصیت است .

اگر با استفاده از روش استقراء ریاضی وکاملاشبیه مسئلهٔ ۶۷عمل کنیم ، بسادگی‌ثابت می‌شود که $u_{n+10}-u_n$ به ازای $n=1,2,\cdots$ بر ۱۱ قابل قسمت است ، از اینجا نتیجه می‌شودکه ازتقسیم عددهای‌دنبالهٔ فیبوناچی بر ۱۱ ، دنبالهٔ متناوبی با دورهٔ تناوب سادهٔ ده‌جمله‌ای بدست می‌آید . این دورهٔ تناوب عبارتست از :

$$1,1,2,3,5,8,2,10,1,0$$

و همانطورکه دیده می‌شود ، شامل ۴ (و همچنین ۶ ، ۷ و ۹) نیست.

۶۹ فرض می‌کنیم n جملهٔ تصاعد ما

$$ak_1+b,ak_2+b,\cdots,ak_n+b$$

دوبه‌دو نسبت بهم اول باشند (برای $n=1$ می‌توان $k_1=1$ گرفت) . در نظر می‌گیریم :

$$m=(ak_1+b)(ak_2+b)\cdots(ak_n+b)$$

براساس مسئلهٔ ۶۴ ، عدد طبیعی k_{n+1} وجود دارد ، بنحوی که $(ak_{n+1}+b,m)=1$ باشد و بنابراین $(ak_{n+1}+b,ak_i+b)=1$ برای $i=1,2,\cdots,n$. به‌این ترتیب عددهای

$$ak_2+b,\cdots,ak_n+b,ak_{n+1}+b$$

دوبه‌دونسبت بهم اول می‌شوند .

بنابراین دنبالهٔ‌نامحدودی‌ازعددهای طبیعی k_1 ، k_2 ، ... بوسیلهٔ

استقراء بدست می‌آیدکه دنبالهٔ متناظر آن ak_i+b $(i=1,2,\dots)$ ، که دنباله‌ای از جمله‌های تصاعد مفروض است ، دو به دو نسبت بهم اولند .

۷۰* . فرض کنید : $d=(a,a+b)$ ، در اینصورت $a=da_1$ و $a+b=dc$ ، که در آن $(a_1,c)=1$ و $c>1$ است (زیرا $d\leqslant a$ و $dc=a+b>a$) . چون $(a_1,c)=1$ است ، طبق قضیهٔ اولرداریم :

$$c^{\varphi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1} \implies c^{n\varphi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1} \implies$$

$$\implies c^{n\varphi(a_1)}-1=t_n a_1$$

t_n عددی طبیعی است که می‌تواندبه‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد (زیرا $c>1$ و n عدد طبیعیِ دلخواهی است) ، ضمناً داریم :

$$a(ct_n+1)+b=da_1\cdot ct_n+dc=dc^{n\varphi(a_1)+1}$$

بنابراین جمله‌های $a(ct_n+1)+b$ از تصاعد ما (که می‌تواند به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد) دارای‌همان مقسوم‌علیه‌های اول عدد $dc>1$ است .

به‌این ترتیب در تصاعد مفروض ، بی‌نهایت جمله وجود دارد که مقسوم‌علیه‌های اول مشترك دارند .

۷۱ . از قضیهٔ **دیریکله** بلافاصله‌نتیجه می‌شود،که قضیه برای‌حالات $s=1$ صحیح است . حالا s را عدد مفروض طبیعی می گیریم . فرض می‌کنیم‌که قضیه برای عدد s صحیح باشد . بنابراین ، اگر $(a,b)=1$ باشد ، عدد k_s وجود دارد، بنحوی که $ak_s+b=q_1q_2\cdots q_s$ باشد،

که درآن $q_1<q_2<\cdots<q_s$ عددهائی‌اول هستند. طبق‌قضیهٔ دیریکله ، بی‌نهایت عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی که $ak+1=q$ ، عدد اولی بزرگتر از q_s باشد .

برای $t=q_1q_2\cdots q_sk+k_0$ داریم :

$$at+b=q_1q_2\cdots q_sak+ak_0+b=q_1q_2\cdots q_s(ak+1)=$$

$$=q_1q_2\cdots q_sq$$

یعنی قضیه برای $s+1$ صحیح است ، بنابراین با استقراء ریاضی ثابت شدکه قضیه برای هر عدد طبیعی s صحیح است .

۷۲ . اگر p عددی اول باشد ، از سه عدد p، $p+10$ و $p+20$ ، همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است (زیرا درهرحال‌داریم : $p+10\equiv p+1 \pmod 3$ ، $p+20\equiv p+2 \pmod 3$ ، و از سه عدد متوالی p ، $p+1$ و $p+2$ همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است). بنابراین اگر بخواهیم هر سه عدد اول باشد ، باید یکی از آنها ، و طبعاً کوچکترین آنها ، مساوی ۳ باشد ؛ یعنی $p=3$، $p+10=13$ ، $p+20=23$. به‌این ترتیب ، تنها یك تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۰ وجود دارد که از سه عدد اول تشکیل شده باشد ، یعنی تصاعد :

$$3,13,23$$

سپس بسادگی می‌توان ثابت کرد که تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۰ وجود ندارد که از چهار جمله (و یا بیشتر) عدد اول تشکیل شده باشد . در حقیقت اگر عددهای p ، $p+10$ ، $p+20$ ، $P+30$، ... عددهای اول باشند ، طبق آنچه‌گفتیم باید $p=3$ شود ،که دراینصورت

$۳۰۱۱ = ۳۳ = ۳۰ + p$ ، عددی مرکب می‌شود .

تبصره. از یك فرضیهٔ آ . شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول p وجوددارد، بنحوی‌که $۱۰ + p$ هم عددی اول باشد. مثل ۷و۱۷، ۱۳و۲۳ ، ۱۹و۲۹ ، ۳۱و۴۱ ، ۳۷و۴۷ . ۶۱و۷۱، ۷۳و۸۳، ۷۹و۸۹ .

۷۳ . چنین تصاعددی وجود ندارد، زیرا از عددهای p، $p + ۱۰۰$ و $p + ۲۰۰$ همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است ، یعنی اگر آنها اول باشند ، باید $p = ۳$ شود ،که‌دراینصورت‌عدد $۷۰۲۹ = ۲۰۳ = p + ۲۰۰$ عددی اول نیست .

تبصره. بهمین ترتیب می‌توان‌ثابت‌کرد‌که‌تصاعدی با قدر نسبت ۱۰۰۰ وجود ندارد ،که از سه (یا بیشتر) عدد اول تشکیل شده باشد ، زیرا $۱۷۰۵۹ = ۱۰۰۳$ عددی است مرکب . از فرضیهٔ شینتسل نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول p وجود دارد ، که در مورد آن $p + ۱۰۰۰$ هم عددی اول باشد ، مثلا ۱۳و۱۰۱۳ ، ۱۹و۱۰۱۹ ، ۳۱و۱۰۳۱ ، ۶۱و۱۰۶۱ ، ۹۷و۱۰۹۷ ، ۱۰۳و۱۱۰۳ ، ۱۰۳۹و۲۰۳۹ .

۷۴* . اگر قدر نسبت تصاعد ، فرد باشد، جملهٔ دوم این تصاعد عددی زوج‌می‌شودکه ممکن نیست ، زیراتصاعد ما ازده عدد اول‌تشکیل شده است . بنابراین قدر نسبت تصاعد ما ، عددی است زوج . اگر هم جملهٔ اول تصاعد مساوی ۲ باشد . جمله‌های بعد از آنها عددهائی زوج و مرکب می‌شوند. به‌این ترتیب ، جملهٔ اول تصاعد، عدد اول‌فردی است و بنابراین همهٔ جمله‌های تصاعد (با توجه به زوج بودن قدر نسبت) ، عددهای اول فرد هستند .

از قضیهٔ **و. ته بولت** استفاده می‌کنیم که برطبق آن ، اگر **n** جمله از یك تصاعد حسابی ، عددهای اول فرد باشند قدر نسبت این تصاعد بر هر یك از عددهای اول کوچکتر از **n** قابل قسمت‌اند .

از این قضیه نتیجه می‌شود (برای $n=۱۰$)، که قدر نسبت تصاعد ما باید مضربی از عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ و بنابراین مضربی از ۲۱۰ باشد. ابتدا تصاعد حسابی ده جمله‌ای را جستجو می‌کنیم که قدر نسبتی مساوی ۲۱۰ داشته باشد و از کوچکترین عددهای ممکن اول تشکیل شده باشد .

چون ۲۱۰ (قدر نسبت تصاعد) ، بر عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ قابل قسمت است ، واضح است که هیچیك از این عددها نمی‌توانند جملهٔ اول تصاعد مورد نظر باشند. عدد ۱۱ هم نمی‌تواند جملهٔ اول تصاعد باشد ، زیرا دراینصورت جملهٔ دوم $۱۳.۱۷ = ۲۲۱$ ، عددی مرکب می‌شود. بنابراین جملهٔ اول تصاعد مورد نظر بزرگتر از ۱۱ است، یعنی هیچیك از جمله‌های تصاعد قابل قسمت بر ۱۱ نیستند . باقیمانده عدد ۲۱۰ بر ۱۱ مساوی واحد است ، بنابراین هر یك از جمله‌های تصاعد ، در تقسیم بر ۱۱ ، باقیمانده‌ای پیدا می‌کنند که یك واحد بیشتر از باقیماندهٔ تقسیم جملهٔ قبلی آن بر ۱۱ است . پس ، اگر باقیماندهٔ تقسیم جملهٔ اول تصاعد بر ۱۱ ، عددی بزرگتر از واحد باشد، یکی از جمله‌های تصاعد قابل قسمت بر ۱۱ می‌شود ، که ممکن نیست . بنابراین باید جملهٔ اول تصاعد مورد نظر در تقسیم بر ۱۱ . باقیمانده‌ای مساوی واحد داشته باشد ، یعنی بصورت $۲۲k+۱$ (**k** عددی است طبیعی) باشد . دنبالهٔ عددهای اولی که به‌اینصورت هستند ، عبارتست از ۲۳ ، ۶۷ ، ۸۹ ، ۱۹۹ ، ...

اگـر جملهٔ اول تصاعـد را ۲۳ بگیریـم . جملهٔ ششم تصاعـد : ۲۹.۳۷ = ۱۰۷۳ ، عددی‌مرکب می‌شود . اگرجملهٔ اول را ۶۷بگیریم، جملهٔ چهارم آن ، عدد مرکب ۱۷.۴۱ = ۶۹۷ می‌شود . اگر جملهٔ اول تصاعد ۸۹ بـاشد ، جملهٔ دوم تصاعد : ۱۳.۲۳ = ۲۹۹ ، عـددی مرکب می‌شود . ولی اگر عدد ۱۹۹ را به عنوان اولین جملهٔ تصاعد ، در نظر بگیریم ، تصاعدی با قدر نسبت ۲۱۰ بدست می‌آید که از ده عدد اول تشکیل شده است :

۱۹۹,۴۰۹,۶۱۹,۸۲۹,۱۰۳۹,۱۲۴۹,۱۴۵۹,۱۶۶۹,۱۸۷۹,۲۰۸۹

حالا فرض می‌کنیم ، تصاعد حسابی صعودی با قدر نسبت r ، غیر از ۲۱۰ ، داشته باشیم . همانطورکه می‌دانیم ، باید r مضربی از ۲۱۰ باشد ، یعنی در هر حال $r \geqslant ۴۲۰$ در اینصورت جملهٔ دوم تصاعد از ۴۲۰ ، ودر نتیجه ازجملهٔ دوم‌تصاعد فوق (یعنی۴۰۹) بزرگتر می‌شود . بنابراین جمله‌های بعدی آن ، از جمله‌های متناظر تصاعدی کـه پیدا پیدا کرده‌ایم بزرگتر می‌شوند .

به این ترتیب ، تصاعدی‌که بدست‌آورده‌ایم ، یعنی تصاعد حسابی با جملهٔ اول ۱۹۹ و قدر نسبت ۲۱۰ ، یك تصاعد ده جمله‌ای حسابی صعودی است ، که جمله‌های آن از عددهای اول تشکیل شده است و آخرین آن ،کوچکترین عدد ممکنه است .

تبصره. طولانی‌ترین تصاعد حسابی صعودی ، کـه از عددهای اول تشکیل شده و تاکنون شناخته شده است ، یك تصاعد سیزده جمله‌ای است ، که جملهٔ اول‌آن ۴۹۴۳ و قدر نسبت آن ۶۰۰۶۰ می‌باشد . این تصاعد را **سره‌وینسکی** از مسکو پیداکرده است .

از فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شودکه بی‌نهایت تصاعد حسابی سیزده جمله‌ای با قدرنسبت ۳۰۰۳۰ وجود دارد ، که همهٔ جمله‌های‌آن عددهائی اول باشند؛ ولی‌تاکنون حتی یکی از این‌تصاعدها هم پیدا نشده است .

۷۵ . مثلا تصاعد $۳۰k+۷ (k=۱,۲,۳,\dots)$ از این نوع است.

در حقیقت،اگرفرض‌کنیم $۳۰k+۷=p+q$ ، چون $۳۰k+۷$ عددی است فرد ، باید یکی از عددهای pوq زوج باشند ، بنابراین برای اینکه اول باشد باید ۲ باشد . اگر مثلا $q=۲$ باشد $p=۳۰k+۵=۵(۶k+۱)$ می‌شودکه ممکن نیست ، زیرا p عددی است اول . اگر هم فرض کنیم $۳۰k+۷=p-q$ (که pوq عددهائی اولند)،بایدمثلا$q=۲$باشدودراینصورت$p=۳۰k+۹=۳(۱۰k+۳)$ می‌شود که ممکن نیست .

تبصره. می‌توان ثابت‌کرد (که البته مشکل است) ، که بی‌نهایت عدد زوج وجود دارد . بنحوی که در عین حال هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول باشند . از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد که می‌تواند هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول باشد .

۴. عددهای اول و مرکب

۷۶ . کافی است $p=۳$و$q=۵$ بگیریم . اگر nعددی زوج و بزرگتراز۶باشد،$n-۱ \geqslant ۶$ و $p<q<n-۱$،ضمناً$n-p=n-۳$ و $n-q=n-۵$ دو عدد فرد متوالی وبنابراین نسبت بهم اول‌می‌شوند.

۷۷ . تنها یك عدد اول بااین خاصیت وجود دارد : ۵ . فرض می‌کنیم که‌عدد اول r ، درعین‌حال هم‌مجموع‌وهم‌تفاضل دوعدد اول‌باشد. واضح است که r باید از ۲ بزرگتر باشد و بنابراین عددی است فرد . چون r هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول است ، باید یکی از آنها عددی فرد و دیگری زوج ، یعنی ۲ ، باشد .

بنابراین داریم : $r=p+2=q-2$ ، که p وq عددهای اول فرد هستند . ولی در اینصورت $r=p+2$ ، p و $q=r+2$ ، سه عدد فرد متوالی می‌شوند و همانطورکه می‌دانیم تنها سه عدد ۳ ، ۵ ، ۷ این خاصیت را دارند (زیرا از هر سه عدد فرد متوالی . باید یکی بر ۳ قابل قسمت باشد) . بنابراین داریم ؛ $r=۵=۳+۲=۷-۲$.

۷۸ . $n=۱۱۳,۱۳۹,۱۸۱$ ؛ $m=۲۰,۵۱,۶۲$.

۷۹ . طبق قضیهٔ معروف فرما ، هر عدد اول بصورت $۴k+۱$ را می‌توان به مجموع دو مربع‌کامل تبدیل‌کرد. به این ترتیب برای هرعدد اول p داریم: $p=a^۲+b^۲$. a و b عددهای طبیعی ومختلف‌اند(زیرا p عددی‌فردبود) ومثلا $a>b$. ازآنجابدست‌می‌آید : $p^۲=(a^۲-b^۲)^۲+(۲ab)^۲$ ، یعنی p وتر مثلث‌قائم‌الزاوای‌است‌که اضلاع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه آن $a^۲-b^۲$ و $۲ab$ است . مثلا

$$۵^۲=۳^۲+۴^۲, ۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲,$$
$$۱۷^۲=۱۵^۲+۸^۲, ۲۹^۲=۲۱^۲+۲۰^۲ \ldots$$

۸۰ . جوابها چنین‌اند :

$$۱۳^۲+۱=۷^۲+۱۱^۲, ۱۷^۲+۱=۱۱^۲+۱۳^۲,$$
$$۲۳^۲+۱=۱۳^۲+۱۹^۲, ۳۱^۲+۱=۱۱^۲+۲۹^۲$$

تبصره. از اتحاد $(۵x+۱۳)^۲+۱=(۳x+۷)^۲+(۴x+۱۱)^۲$ نتیجه می‌شود که اگر عددهای $p=۵x+۱۳$، $q=۳x+۷$، $r=۴x+۱۱$ اول باشند، $p^۲+۱=q^۲+r^۲$ خواهد بود. از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول می‌توان نتیجه گرفت که تعداد چنین دستگاههائی از عددهای اول بی‌نهایت است.

۸۱. قبل از همه متذکر می‌شویم که اگر p، q، r، s و t عددهائی اول و $p^۲+q^۲=r^۲+s^۲+t^۲$ باشد، هریك از عددهای p و q با هریك از عددهای r، s و t فرق خواهند داشت. در حقیقت، اگر مثلا $p=r$ باشد، به معادلهٔ $q^۲=s^۲+t^۲$ می‌رسیم، که برای عددهای اول q، s و t جواب ندارد، زیرا عددهای s و t نمی‌توانند هر دو زوج یا هر دو فرد باشند (در هر یك از این دو حالت $q=۲$ می‌شود، در حالیکه طرف دیگر تساوی از ۴ بزرگتر است). اگر هم $s=۲$ بگیریم، عدد ۴ مساوی تفاضل مربعهای دو عدد طبیعی می‌شود که ممکن نیست.

اگر $p^۲+q^۲=r^۲+s^۲+t^۲$ باشد، در اینصورت همهٔ عددهای p، q، r، s، t نمی‌توانند فرد باشند. اگر p زوج باشد، $p=۲$ می‌شود، بنابراین باید عددهای q، r، s، t فرد باشند، و چون در تقسیم یك مربع کامل بر ۸ باقیماندهٔ ۱ بدست می‌آید، باقیماندهٔ سمت چپ تساوی در تقسیم بر ۸ مساوی ۵ و باقیماندهٔ سمت راست تساوی در تقسیم بر ۸ مساوی ۳ می‌شود، که ممکن نیست. اگر هر دو عدد p و q فرد باشند، از تقسیم سمت چپ تساوی بر ۸، باقیماندهٔ ۲ بدست می‌آید، در سمت راست تساوی، تنها یکی از عددها می‌تواند و باید زوج باشد و مثلا $r=۲$. ولی در اینصورت از تقسیم سمت راست تساوی بر ۸، باقیماندهٔ ۶ بدست

می‌آید .که ممکن نیست .

۸۲* . حل **آ.شینتسل** را می‌آوریم .

معادله برای عددهای‌اول‌تنهایك جواب دارد : $r=۳، p=q=۲$

برای اینکه این مطلب را ثابت کنیم ، همهٔ جوابهای معادلهٔ $p(p+۱)+q(q+۱)=n(n+۱)$ را بدست می‌آوریم ، که در آن p و q عددهائی اول و n یك عددطبیعی‌است ، ازاین‌معادله‌می‌توان بدست آورد .

$$p(p+۱)=n(n+۱)-q(q+۱)=(n-q)(n+q+۱)$$

ضمناً باید $n>q$ باشد . چون p عددی است اول ، باید $n-q$ یا $n+q+۱$ بر p قابل قسمت باشد . اگر $n-q$ بر p قابل قسمت‌باشد باید $p\leqslant n-q$ شود،که‌ازآنجا $p(p+۱)\leqslant(n-q)(n-q+۱)$ودر نتیجه $n+q+۱\leqslant n-q+۱$ می‌شود که ممکن نیست . بنابراین $n+q+۱$ بر p قابل قسمت است ، یعنی به ازای یك عدد طبیعی k داریم :

$$n+q+۱=kp \quad\Longrightarrow\quad p+۱=k(n-q) \qquad (۱)$$

اگر $k=۱$ باشد ، $n+q+۱=p$ و $p+۱=n-q$ و از آنجا $p-q=n+۱$ و $p+q=n-۱$ می‌شود که ممکن نیست .

به‌این ترتیب $k>۱$ است . از رابطهٔ (۱) بسادگی بدست می‌آید:

$$۲q=(n+q)-(n-q)=kp-۱-(n-q)=$$

$$=k[k(n-q)-۱]-۱-(n-q)=(k+۱)[(k-۱)(n-q)-۱]$$

چون $k \geqslant ۲$ است، $k+۱ \geqslant ۳$ می‌شود و از تساوی اخیر، که سمت چپ آن تنها مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱، ۲، q و $۲q$ را دارد، نتیجه می‌شود که $k+۱=q$ یا $k+۱=۲q$. اگر $k+۱=q$ باشد، $(k-۱)(n-q)=۳$، یعنی $(q-۲)(n-q)=۳$ می‌شود که یا $q-۲=۱$، $n-q=۳$ را می‌دهد که از آنجا $q=۳$، $n=۶$، $k=q-۱=۲$ و با توجه به $p=۵$ (۱) بدست می‌آید و یا $q-۲=۱$، $n-q=۱$ را می‌دهد که از آنجا $q=۵$، $n=۶$، $k=۴$ و با توجه به $p=۳$ (۱) بدست می‌آید.

اگر $k+۱=۲q$ باشد، $(k-۱)(n-q)=۲$، یعنی $۲(q-۱)(n-q)=۲$ می‌شود و از آنجا $q-۱=۱$ و $n-q=۱$ بدست می‌آید؛ بنابراین $q=۲$، $n=۳$ واز $p=۲$ (۱) بدست می‌آید. به‌این ترتیب، وقتی n عددی طبیعی باشد، جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$p=q=۲, n=۳ \quad ; \quad p=۵, q=۳, n=۶ \quad ; \quad p=۳, q=۵, n=۶$$

که اگر بخواهیم هر سه عدد p، q و r اول باشند، تنها جواب $p=q=۲$، $r=۳$ قابل قبول است.

تبصره. اگر $t_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ را n امین عدد مثلثی بگیریم، قضیهٔ فوق را می‌توان به‌این‌ترتیب منظم‌کرد: معادلهٔ $t_p+t_q=t_r$ تنهایك جواب برای عددهای اول دارد: $p=q=۲$، $r=۳$.

۸۳*. مثلاعددهای‌اول $p=۱۲۷$، $q=۳۶۹۷$، $r=۵۵۲۷$ دارای این خاصیت‌اند. بسادگی (و مثلاً به‌کمك جدول عددهای اول) روشن می‌شودکه این سه عدد اولند و سپس اینکه $p(p+۱)$، $q(q+۱)$،

$r(r+1)$ تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند. بطریق زیر می‌توان اینگونه عددهای اول را جستجو کرد.

از اتحاد

$$n(n+1)+(41n+20)(41n+21)=2(29n+14)(29n+15)$$

نتیجه می‌شود، که وقتی n عددی طبیعی باشد، عددهای $n(n+1)$، $(29n+15)(29n+14)$ و $(41n+21)(41n+20)$ تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند. اگر به‌ازای مقداری از عدد طبیعی n، عددهای n، $29n+14$ و $41n+20$ اول باشند، سه عدد مورد نظر بدست می‌آید.

بنابراین کافی است روی عددهای فرد اول n آزمایش کنیم و ببینیم که آیا عددهای $29n+14$ و $41n+20$ اول هستند یا نه. کوچکترین این عددها $n=127$ است که به‌عنوان جواب در ابتدای حل ذکر کردیم. ولی ما تایید نمی‌کنیم که از این راه، می‌توان همهٔ جوابهای مسئله را بدست آورد.

تبصره. از یك فرضیهٔ شینتسل نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول n وجود دارد، که به‌ازای آن هر دو عدد $29n+14$ و $41n+20$ اولند.

این مسئله را به اینطریق هم می‌توان بیان کرد: سه عدد مثلثی چنان پیدا کنید که اولا شمارهٔ ردیف (اندیس) آنها عددی اول باشد، ثانیاً تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند.

۸۴. مسئله تنها یك جواب دارد: $n=4$. در حقیقت به ازای $n=1$، عدد $n+3=4$ مرکب است؛ به‌ازای $n=2$، عدد $n+7=9$

مرکب است ؛ به‌ازای $n=۳$ ، عدد $n+۱=۴$ مرکب است ؛ و وقتی $n>۴$ باشد ، همهٔ عددها از ۵ بزرگتر می‌شوند و لااقل یکی از آنها بر ۵ قابل قسمت می‌شود ، زیرا از تقسیم عددهای ۱،۳،۷،۹،۱۳ و ۱۵ بر ۵ بترتیب باقیمانده‌های ۱،۳،۲،۴،۳ و ۰ بدست می‌آید ، یعنی همهٔ باقیمانده‌های ممکن . از اینجا نتیجه می‌شود که عددهای $n+۱$ ، $n+۳$ ، $n+۷$ ، $n+۹$ ، $n+۱۳$ و $n+۱۵$ در تقسیم بر ۵ ، همهٔ باقیمانده‌های ممکن را می‌دهند و بنابراین لااقل یکی از آنها بر ۵ قابل قسمت وعددی مرکب می‌شود (به‌ازای $n>۴$) . ولی وقتی $n=۴$ باشد ، عددهای ۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷و۱۹ بدست می‌آید .

تبصره. از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد طبیعی برای n وجوددارد ، بنحوی $n+۱$ ، $n+۳$ ، $n+۷$ ، $n+۹$ و $n+۱۳$ اول باشند. مثلاً به‌ازای $n=۱۰$ ، $n=۱۰۰$ و $n=۱۰۰۰$.

۸۵ . تنها یك عدد $k=۱$ وجود دارد ، که به‌ازای آن دنبالهٔ

$$k+۱, k+۲, \cdots, k+۱۰ \qquad (۱)$$

شامل پنج عدداول ۲،۳،۵،۷و۱۱ می‌شود . به‌ازای $k=۰$ و $k=۲$ در دنبالهٔ (۱) ، تنها چهار عدد اول وجود دارد . اگر $k\geqslant ۳$ باشد ، در دنبالهٔ (۱) عدد۳ وجود ندارد ، ضمناً میدانیم که از بین هرسه عدد فرد متوالی، یکی بر۳ قابل قسمت است . بنابراین در دنبالهٔ (۱) ،لااقل‌یك عدد فرد مرکب وجود دارد . علاوه برآن ، دنبالهٔ (۱) همیشه شامل ۵ عدد زوج و بنابراین (وقتی $k>۲$باشد)مرکب است. به این ترتیب در دنبالهٔ (۱) ، به‌ازای $k\geqslant ۳$ لااقل ۶ عدد مرکب پیدا می‌شود و بنابراین تعداد عددهای اول نمی‌تواند ازچهار ، تجاوزکند .

تبصره. دنبالهٔ (۱) برای $k=0,2,10,100,190,820$ ، شامل چهار عدد اول است . معلوم نیست که آیا تعداد چنین عددهائی برای k ، بی‌نهایت است یا نه ؟ تنها به‌کمك یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول ، می‌توان به این سئوال پاسخ داد .

۸۶ . تنها یك عدد $k=1$ وجود دارد ،که به‌ازای آن دنبالهٔ

$$k+1,k+2,\cdots,k+100 \qquad (1)$$

شامل ۲۶ عدد اول است. به‌ازای $k=0,2,3,4$ ، دنبالهٔ (۱) شامل۲۵ عدد اول است . فرض می‌کنیم ، $k\geqslant 5$ باشد . دنبالهٔ (۱) شامل ۵۰عدد زوج است که اگر $k>1$ باشد ، همهٔ آنها عددهائی مرکب هستند.علاوه برآن ، دنبالهٔ (۱) شامل ۵۰ عددفرد متوالی‌است ،که از بین آنها لااقل ۱۶ تا مضرب ۳ هستند (زیرا از هرسه‌عدد فرد متوالی، یکی بر ۳ قابل قسمت است) ، بنابراین ، وقتی $k>2$ باشد ، این ۱۶ عدد هم‌مرکب‌اند حالا حساب می‌کنیم‌که در دنبالهٔ (۱) ، چندعدد بر ۵ قابل قسمت،ولی بر ۲و۳ غیر قابل قسمت است . چنین عددهائی بصورت $30t+7$ هستند که در آن $t\geqslant 0$ عددی صحیح و ۷ یکی ازعددهای ۵ یا ۲۵ باشد . این عددها ، دنبالهٔ نامحدود صعودی را تشکیل می‌دهند .

$$5,25,35,55,65,85,95,115,125,145,155,175,185,\cdots \quad (2)$$

جملهٔ n ام این‌دنباله را u_n می‌گیریم.بسادگی‌معلوم می‌شودکه‌دراینصورت $u_{n+6}-u_n<100$ است $(n=1,2,\cdots)$. u_n را بزرگترین جمله از دنبالهٔ $(u_1,u_2,\cdots)$ می‌گیریم که از k بزرگتر نباشد . در اینصورت داریم :

$$u_n \leqslant k < u_{n+1} < u_{n+6} < u_n + ۱۰۰ \leqslant k + ۱۰۰$$

به این ترتیب دیده می‌شود که در دنبالهٔ (۱) ، لااقل ۶ جمله از دنبالهٔ (۲) وجود دارد ، بنابراین لااقل شش جمله وجود دارد کـه بر ۵ قابل قسمت و بر ۲و۳ غیر قابل قسمت است ، که اگر $k \geqslant ۵$ باشد ، همهٔ آنها عددهائی مرکب‌اند .

بالاخره به محاسبهٔ تعداد عددهائی از دنبالهٔ (۱) می‌پردازیم که بر ۷ قابل قسمت ، ولی بر ۲ ، ۳ و ۵ غیر قابل قسمت باشند ، همهٔ این عددها بصورت $۲۱۰t + ۷$ هستند ،که در آن ۷ یکی از عددهای۷،۴۹، ۷۷،۹۱،۱۱۹،۱۳۳،۱۶۱،۲۰۳ و $t \geqslant ۰$ عددی‌صحیح‌است.ازهمهٔاینگونه عددها دنبالهٔ صعودی و نامحدود زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$۷,۴۹,۷۷,۹۱,۱۱۹,۱۳۳,۱۶۱,۲۰۳,۲۱۷,۲۵۹,۲۸۷,\cdots \quad (۳)$$

n امین‌جملهٔ این‌دنباله را به v_n نشان می‌دهیم. بسادگی‌معلوم‌می‌شود که $v_{n+۳} - v_n < ۱۰۰$ است $(n = ۱,۲,\cdots)$.فرض‌کنید v_n بزرگترین‌عدد از دنبالهٔ $(v_۱, v_۲, \cdots)$ باشد ، که از k تجاوزنکند ، دراینصورت‌داریم:

$$v_n \leqslant k < v_{n+۱} < v_{n+۳} < v_n + ۱۰۰ \leqslant k + ۱۰۰$$

از اینجا روشن می‌شود که در دنبالهٔ (۱) ، لااقل ۳ عدد از دنبالهٔ (۳) وجود دارد ، یعنی ۳ عددی که بر ۷ قابل قسمت ، ولی بر ۲ ، ۳ ، ۵ غیر قابل قسمت است و اگر $k \geqslant ۷$ باشد همهٔ آنها عددهائی مرکب‌اند .

به‌این ترتیب دیده می‌شودکه اگر $k \geqslant ۷$ باشد ، در دنبالهٔ (۱) لااقل $۷۵ = ۳ + ۶ + ۱۶ + ۵۰$ عدد مرکب وجود دارد وبنابراین‌تعداد

عددهای اول از ۲۵ تجاوز نمی‌کند . به‌ازای $k=5$ و $k=6$ ، عددهای v_2 ، v_3 و v_4 در دنبالهٔ (۱) مرکب‌اند . بنابراین اگر $k>1$ باشد ، دنبالهٔ (۱) شامل بیش از ۲۵ عدد اول نیست .

۸۷ . مسئله فقط شش جواب دارد ، یعنی هر ۱۰۰ عدد متوالی که با یکی از عددهای ۱، ۳، ۴، ۵، ۱۰ و ۱۱ شروع شود ، شامل ۲۵ عدد اول است .

اثبات این قضیه از لم زیر بدست می‌آید : وقتی $k>11$ باشد ، بین عددهای $k+1, \ldots, k+99$ ، لااقل ۷۶ عدد وجود دارد که بر یکی از عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ یا ۱۱ قابل قسمت است .

برای اثبات لم دنبالهٔ صعودی نامحدودی از عددهائی که بر ۲، ۳، ۵، ۷ یا ۱۱ قابل قسمت‌اند ، تشکیل می‌دهیم . اگر γ ، عددی از این دنباله باشد ، عدد $\gamma+2310$ هم جزو آن خواهد بود و برعکس (زیرا داریم: $2310=2.3.5.7.11$) . $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ را همهٔ عددهای طبیعی می‌گیریم که از ۲۳۱۰ تجاوز نکنند و بر ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ یا ۱۱ قابل قسمت باشند ، همهٔ این عددها در s تصاعد حسابی $2310t+\gamma_i$ وجود دارند ($i=1,2,\ldots,s$ و $t=1,2,\ldots$) . حالا کافی است همهٔ عددهای طبیعی که از $2310+100$ تجاوز نمی‌کنند و بر ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ یا ۱۱ قابل قسمت‌اند بنویسیم و ببینیم که در هر صد عدد $k+1, \ldots, k+99$ ، برای $1 \leqslant k \leqslant 2310$ ، لااقل ۷۶ عدد از دنبالهٔ نوشته شده وجود دارد .

تبصره. با اشکال می‌توان ثابت کرد که تعداد محدودی از عدد طبیعی k وجود دارد ، که برای آنها در دنبالهٔ $k+1, \ldots, k+99$ ، فقط ۲۴ عدد

اول وجود داشته باشد . از یك فرضیهٔ شینتسل نتیجه‌می‌شودکه بی‌نهایت عدد طبیعی k وجود دارد، که به‌ازای آنها، درچنین دنباله‌ای ۲۳ عدداول وجوددارد.

۸۸ . تنها یك عدد اول با این خاصیت وجود دارد : $p=۳$. در حقیقت اگر p عددی اول باشد، طبق قضیهٔ کوچك فرما ، $۲^p-۲$ بر p قابل قسمت است و اگر $۲^p+۱$ هم بر p قابل قسمت باشد ، باید ۳ بر p قابل قسمت شود ، یعنی $p=۳$ باشد .

۸۹. لم. هرفاصله‌ای ازسلسلهٔ طبیعی‌اعداد ،که شامل ۲۱ عدد باشد، شامل لااقل ۱۴ عدداست‌که هریك از آنهالااقل بریکی‌ازعددهای ۲ ، ۳ یا ۵ قابل قسمت است .

اثبات. در هر فاصلهٔ سلسلهٔ طبیعی،که شامل ۲۱ عدد باشد، لااقل ۱۰ عدد وجود دارد که بر ۲ قابل قسمت است ، همچنین لااقل ۱۰ عدد فرد متوالی وجود دارد ،که در بین آنها لااقل سه عدد بر ۳ قابل قسمت است . بنابراین باقی می‌ماندکه ثابت‌کنیم در چنین فاصله‌ای ، لااقل‌یك عدد قابل قسمت بر ۵ وغیرقابل قسمت بر ۲ یا ۳ وجود دارد . باقیماندهٔ تقسیم عدد x را بر ۳۰مساوی γ فرض‌می‌کنیم، دراینصورت $x=۳۰t+\gamma$ می‌شود ($t\geqslant ۰$ عددی صحیح و $\gamma=۰,۱,\dots,۲۹$ است) . اگر $\gamma\leqslant ۵$ باشد ، $x\leqslant ۳۰t+۵<x+۲۰$ می‌شود و عدد $۳۰t+۵۰$ عددی از دنبالهٔ

$$x,x+۱,\dots,x+۲۰ \qquad (۱)$$

می‌شودکه بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است . اگر $۵<\gamma\leqslant ۲۵$ باشد . $x\leqslant ۳۰t+۲۵<x+۲۰$ می‌شود وعدد $۳۰t+۲۵$

عددی از دنبالهٔ (۱) است که بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است .

بالاخره اگر $۲۵<x<۳۰$ باشد ، $x<۳۰t+۳۵<۲+۲۰$ می‌شود و عدد $۳۰t+۳۵$ عددی از دنبالهٔ (۱)است که بر ۵ قابل‌قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است . به این ترتیب لم ثابت شد .

از این لم بلافاصله نتیجه می‌شود که در هر فاصلهٔ سلسلهٔ طبیعی، که شامل ۲۱ عدد و هرکدام از آنها بزرگتر از ۵باشد . لااقل ۱۴عدد مرکب وجود دارد و بنابراین تعداد عددهای اول از ۷ تجاوز نمی‌کند. برای $x=۱$ ، $x=۲$ و $x=۳$ در دنبالهٔ (۱) هشت عدد اول و برای $x=۴$ و $x=۵$ ، هفت عدد اول وجود دارد . به این ترتیب در دنبالهٔ

$$x,x+۱,x+۲,\cdots,x+۲۰$$

تنها وقتی ۸ عدد اول وجود دارد که $x=۱,۲,۳$ باشد.

۹۰ . تنها $p=۵$ دارای این خاصیت‌است. بسهولت تحقیق‌می‌شود که $p<۵$ نمی‌تواند باشد . برای $p=۵$. عددهای اول ۵،۷،۱۱،۱۳، ۱۷ و ۱۹ بدست می‌آید . اگر $p>۵$ و $p=۵k$ باشد (k عددی است طبیعی) ، p عددی مرکب‌می‌شود . اگر $p=۵k+۱$ باشد ، عدد $p+۱۴$ بر ۵ قابل قسمت و عددی مرکب می‌شود . اگر $p=۵k+۲$ باشد ، $p+۸$ بر ۵ قابل قسمت‌وعددی مرکب است . اگر $p=۵k+۳$ باشد ، $p+۱۲$ بر ۵ قابل‌قسمت است وبالاخره اگر $p=۵k+۴$ باشد $p+۶$ بر ۵ قابل قسمت است .

۹۱ . اگر $k>۱$ عددی طبیعی باشد ، عددهای $m=۲^k-۲$ و

$n=2^k(2^k-2)$ دارای این خاصیت‌اند، که برای آنها $m+1=2^k-1$ و $n+1=(2^k-1)^2$ می‌شود .

تبصره . پ . اردیوش این سئوال را مطرح می‌کند که آیا زوج عدد دیگری دارای این خاصیت وجود دارد[1] ؟

۹۲ . تنها دوعدداول به‌اینصورت وجود دارد : $2=\frac{2.3}{2}-1$ و $\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$: در حقیقت داریم $5=\frac{3.4}{2}-1$ و وقتی $n\geqslant 4$ باشد ، هر دو عدد $n-1$ و $n+2$ بزرگتر از ۲ می‌شوند و بنابراین یکی از آنها عددی است زوج .

۹۳ . فقط سه عدد اول به‌اینصورت وجود دارد : $T_1+1=2$ ، $T_2+1=5$ ، $T_3+1=11$. در حقیقت اگر $n\geqslant 4$ باشد ، داریم : $T_n+1=\frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$ ،ضمناً $n+3>6$ و $n^2+2>6$ است .

از عددهای $n+3$ و n^2+2 یا یکی زوج و دیگری قابل قسمت بر ۳ است و یا یکی از آنها بر ۶ قابل قسمت است .

۹۴ . مثلا عدد زیر دارای خاصیت مورد نظر است :

$$n=(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_{s+1}-1)$$

زیرا در اینصورت ، بنابر قضیهٔ کوچك فرما . عدد 2^n-1 بر هر یك از عددهای p_2 ، p_3 ، ... ، p_{s+1} قابل قسمت است .

---

۱) به‌سئوال اردیوش می‌توان جواب مثبت داد . **آ . مونکوسکی** یك زوج دیگر از این عددها را بما می دهد: $m=75=3.5^2$ ، $n=1215$ که در مورد آنها داریم : $m+1=2^{2.19}$ ، $n+1=2^{6.19}=5.3^5$

۹۵ · مثلا پنج عدد زیر :

$$۲=۱^۴+۱^۴, ۱۷=۱^۴+۲^۴, ۹۷=۲^۴+۳^۴,$$

$$۲۵۷=۱^۴+۴^۴, ۶۴۱=۲^۴+۵^۴$$

تبصره. از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد ، بطوریکه هر یك از آنها مساوی مجموع توانهای چهارم دوعددطبیعی باشد، وبطورکلی برای هرعدد طبیعی n، بی‌نهایت عدد اول بصورت $a^{۲^n}+b^{۲^n}$ وجود دارد (a و b عددهای طبیعی هستند).

۹۶ · P_k را k امین عدد اول و P_{k_n} را بزرگترین عدد اولی که از $۶n+۱$ کوچکتر باشد (برای‌عدد طبیعی n) فرض می‌کنیم . چون عددهای به صورت $۶n+۲=۲(۳n+۱)$ ، $۶n+۳=۳(۲n+۱)$ و $۶n+۴=۲(۳n+۲)$ مرکب هستند ، در اینصورت واضح است که $P_{k_n+۱}\geqslant ۶n+۵$ می‌شود و بنابراین داریم :

$$P_{k_n+۱}-P_{k_n}\geqslant(۶n+۵)-(۶n+۱)=۴$$

یعنی دنبالهٔ عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ تشکیل زوج عددهای اول توام را نمی‌دهند .

چون $P_{k_n+۱}\geqslant ۶n+۵$ و n می‌تواند هرعددطبیعی باشد ، تعداد این زوج عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ بی‌نهایت می‌شود . متذکر می‌شویم‌که در زوج عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ ، ممکن است P_{k_n} بزرگترین عدد از یك زوج عدد اول توام و $P_{k_n+۱}$ کوچکترین عدد از زوج دیگری از عددهای اول توام باشند ؛ مثلاً برای $n=۱$ ، $P_{k_n}=۷$ عدد بزرگتر

از زوج عددهای توام ۵و۷، $p_{k_n+1}=11$ عدد کوچکتر از زوج عددهای توام ۱۱ و ۱۳ است؛ برای $n=2$ داریم: $p_{k_n}=13$ (بزرگترین عدد از ۱۱ و ۱۳) و $p_{k_n+1}=17$ (کوچکترین عدد از ۱۷ و ۱۹)؛ برای $n=17$ داریم: $p_{k_n}=103=6.17+1$ (بزرگترین عدد از دو عدد توام ۱۰۱ و ۱۰۳) و $p_{k_n+1}=107$ (کوچکترین عدد از دو عدد توام ۱۰۷ و ۱۰۹).

۹۷، طبق قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی، در تصاعد $15k+7$ $(k=1,2,\dots)$ بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. هیچیك از این عددها متعلق به زوج عددهای اول توام نیستند، زیرا داریم:

$$(15k+7)-2=5(3k+1)\quad,\quad (15k+7)+2=3(5k+3)$$

و چون $k>0$ است، هر دو عدد مرکب‌اند.

۹۸. اگر برای عدد طبیعی n، عدد n^2-1 مساوی حاصلضرب سه عدد مختلف اول باشد، چون $3=1-2^2$ است، باید عدد n از ۲ بزرگتر باشد. از طرف دیگر n باید عددی زوج باشد، زیرا در غیر اینصورت هر دو عامل سمت راست تساوی $n^2-1=(n-1)(n+1)$ زوج و n^2-1 بر ۴ قابل‌قسمت می‌شود. ضمناً عددهای $n-1$ و $n+1$ (که هر دو از واحد بزرگترند) نمی‌توانند هر دو مرکب باشند. زیرادر این حالت، عدد n^2-1 بصورت حاصلضرب سه عدد اول در نمی‌آید. به‌این ترتیب یکی از عددهای $n-1$ و $n+1$ باید اول و دیگری حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشد. به‌ازای $n=4$ داریم: $n-1=3$ و $n+1=5$، یعنی با شرایط ما نمی‌سازد. بهمین ترتیب در مورد

$n=۶$ ، زیرا $n-۱=۵$ و $n+۱=۷$ می‌شود . برای $n=۸$ داریم: $n+۱=۱۱$ ، $n-۱=۷$ و $n^۲-۱=۳^۲\times۷$. برای $n=۱۰$ داریم: $n+۱=۱۱$ ، $n-۱=۹$ و $n^۲-۱=۱۱^۲\times۳$ برای $n=۱۲$ داریم : $n-۱=۱۱$ ، $n+۱=۱۳$ ، برای $n=۱۴$ داریم : $n-۱=۱۳$ ، $n+۱=۳۰۵$.

کوچکترین عدد طبیعی n ، که به ازای آن $n^۲-۱$ مساوی حاصلضرب سه عدد مختلف اول می‌شود ، $n=۱۴$ است که در مورد آن داریم: $n^۲-۱=۳۰۵۰۱۳$. چون $۱۶^۲-۱=۳۰۵۰۱۷$ است، عدد بعدی $n=۱۶$ می‌باشد . سپس بدست می‌آید : $۱۸^۲-۱=۱۷۰۱۹$ و $۲۰^۲-۱=۳۰۷۰۱۹$ ، سومین عدد $n=۲۰$ است. عدد چهارم $n=۲۲$ است زیرا داریم : $۲۲^۳-۱=۳۰۷۰۲۳$. اگر بهمین ترتیب ادامه دهیم بسادگی به‌این نتیجه می‌رسیم که عدد پنجم از عددهای مورد نظر ما $n=۳۲$ است که به‌ازای آن داریم : $n^۲-۱=۳۰۱۱۰۳۱$. به‌این ترتیب پنج عدد کوچکتری که با شرط مسئله بسازد عبارتند از ۱۴ ، ۱۶ ، ۲۰ ، ۲۲ ، ۳۲ .

تبصره. از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که برای عدد n بی‌نهایت جواب وجود داردکه به‌ازای هریك از آنها $n^۲-۱$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف باشد ، و بطورکلی برای هر عدد طبیعی $s>۱$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که به‌ازای هر یك از آنها $n^۲-۱$ بصورت حاصلضرب s عدد اول مختلف تجزیه شود. واضح است که در مورد $s=۲$ ، عددهای $n-۱$ و $n+۱$ زوج عددهای اول توام را می‌دهند .

۹۹ . پنج جواب کوچکتر برای عدد طبیعی n ، بنحوی که عدد

n^2+1 مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف بشود ، عبارتند از عددهای ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۳ و ۲۷ ؛ زیرا داریم :

$$13^2+1=2.5.17 \quad , \quad 17^2+1=2.5.29, 21^2+1=2.13.17,$$
$$23^2+1=2.5.53 \quad , \quad 27^2+1=2.5.73$$

و برای $n=112$ داریم : $112^2+1=5.13.193$

(کوشش کنید نمونه‌های دیگری بدست آورید) .

تبصره. از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی s ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که به‌ازای هریك از آنها ، عدد n^2+1 مساوی حاصلضرب s عدد اول مختلف باشد .

a°. ۱۰۰) فرض می‌کنیم که هر یك از سه عدد طبیعی n، $n+1$ و $n+2$ ($n>7$) تنها بریك عدد اول قابل قسمت باشند . در اینصورت هیچیك از این عددها نمی‌توانند بر ۶ قابل قسمت باشند و بنابراین عدد n می‌تواند تنها بصورت $6k+1$ ، $6k+2$ یا $6k+3$ باشد (k عددی است طبیعی) .

اگر $n=6k+1$ باشد ، چون عدد $6k+2$ زوج است و یك مقسوم‌علیه اول دارد ، باید بصورت 2^m باشد ، که در آن m عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ است (زیرا $n>7$ یعنی $n+1>8$ و $n+1=6k+2$ بود). عدد $6k+3=n+2$ هم ، چون بر ۳ قابل قسمت است و یك مقسوم‌علیه اول دارد ، باید بصورت 3^s باشد ، که در آن s عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ است (زیرا $n+2=6k+3>9$) . ضمناً باید رابطهٔ $3^s-2^m=1$

برقرار باشد . ولی معادلهٔ اخیر برای عددهای طبیعی m و s فقط دو جواب دارد : $s=۱$ ، $m=۱$ و $s+۲$ ، $m=۳$ (مسئلهٔ ۱۵۵ را ببینید) . بنابراین حالت $n=۶k+۱$ ممکن نیست .

اگر $n=۶k+۲$ باشد ، باید $n+۱=۶k+۳=۳^s$ $(s\geqslant ۲)$؛ $n+۲=۶k+۴=۲^m$ $(m>۳)$ و $۲^m-۳^s=۱$ باشد . ولی معادلهٔ $۲^m-۳^s=۱$ برای عددهای طبیعی m و s تنها یك جواب دارد : $m=۲$ ، $s=۱$ (مسئلهٔ ۱۵۴ را ببینید) بنابراین حالت $n=۶k+۲$ هم ممکن نیست .

بالاخره اگر $n=۶k+۳$ باشد، باید داشته باشیم : $n=۳^s$ $(s\geqslant ۲)$. $n+۱=۲^m$ $(m>۳)$ و $۲^m-۳^s=۱$ که ممکن نیست .

به‌این ترتیب فرض اینکه به‌ازای عددهای طبیعی $n>۷$، هیچیك از عددهای n ، $n+۱$ و $n+۲$ ، دو مقسوم‌علیه مختلف اول یا بیشتر نداشته باشند ، به تناقض برخورد می‌کند .

ولی به ازای $n=۷$ داریم : $n+۱=۲^۳$. $n+۲=۳^۲$ ، یعنی هر یك از عددهای n ، $n+۱$ و $n+۲$ ، فقط یك مقسوم علیه اول دارند .

b) اگر k عددی طبیعی باشد، عددهای $۶(۶k+۱)$ و $۶(۶k+۵)$ لااقل سه مقسوم‌علیه مختلف اول دارند . یعنی بجز ۲ و ۳ لااقل یك مقسوم‌علیه اول دیگر هم دارند (زیرا عددهای $۶k+۱>۱$ و $۶k+۵>۱$ نه بر ۲ و نه بر ۳ قابل قسمت نیستند) . اگر دو تصاعد $۳۶k+۶$ و $۳۶k+۳۰$ $(k=۱,۲,\dots)$ را در یك دنباله بنویسیم و عدد $۲.۳.۵=۳۰$ را به ابتدای آن اضافه کنیم ، دنبالهٔ بی‌نهایت

زیر بدست می‌آید :

$$۳۰.۴۲.۶۶,۷۸,۱۰۲,\ldots,۳۶\mathbf{k}+۶,۳۶\mathbf{k}+۳۰,\ldots$$

که تفاضل هر دوجملهٔ‌متوالی آن۱۲ یا ۲۴ است و هر یك از جمله‌های آن لااقل سه مقسوم‌علیه مختلف اول دارد .

۱۵۱ .

$\mathbf{n}=۳۳ \quad (\mathbf{n}=۳۰۱۱,\mathbf{n}+۱=۲۰۱۷,\mathbf{n}+۲=۵۰۷)$

$\mathbf{n}=۸۵ \quad (\mathbf{n}=۵۰۱۷,\mathbf{n}+۱=۲۰۴۳,\mathbf{n}+۲=۳۰۲۹)$

$\mathbf{n}=۹۳ \quad (\mathbf{n}=۳۰۳۱,\mathbf{n}+۱=۲۰۴۷,\mathbf{n}+۲=۵۰۱۹)$

$\mathbf{n}=۱۴۱ \quad (\mathbf{n}=۳\ ۴۷,\mathbf{n}+۱=۲۰۷۱,\mathbf{n}+۲=۱۱۰۱۳)$

$\mathbf{n}=۲۰۱ \quad (\mathbf{n}=۳۰۶۷,\mathbf{n}+۱=۲۰۱۰۱,\mathbf{n}+۲=۷۰۲۹)$

چهار عدد طبیعی متوالی وجود ندارد که هر یك از آنها مساوی حاصلضرب دو مقسوم‌علیه مختلف اول باشد ، زیرا از چهار عدد طبیعی متوالی ، حتماً یکی بر ۴ قابل قسمت است . نمونهٔ چهار عدد طبیعی متوالی‌که هریك ازآنها تنها دومقسوم‌علیه اول‌داشته باشند ،عبارتست از

$$۳۳=۳۰۱۱,۳۴=۲۰۱۷,۳۵=۵۰۷,۳۶=۲^{۲}.۳^{۲}$$

تبصره. نمی‌توانیم ثابت کنیم که بی‌نهایت عدد طبیعی $\mathbf{n}$ وجود دارد ، که به ازای هر یك از آنها ، عددهای $\mathbf{n}$ ، $\mathbf{n}+۱$ ، $\mathbf{n}+۲$ حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشند (این حکم نتیجه‌ای از یك فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول است).

۱۵۲ . فرض می‌کنیم‌که‌بی‌نهایت‌عدد طبیعی $\mathbf{n}$ وجود داشته‌باشد ،

که به ازای آنها هر یك از عددهای n و $n+۱$ تنها یك مقسوم علیه اول داشته باشند. در اینصورت، اگر $n>۱$ باشد، با توجه به اینکه از دو عدد n و $n+۱$ یکی زوج ودیگری فرد است، برای عدد اولی مثل p خواهیم داشت $p^k - ۲^m = \pm ۱$ (m و k عددهای طبیعی هستند) و از آنجا $p^k = ۲^m \pm ۱$.

می‌دانیم که اگر عدد **مرسه‌نا** از واحد بزرگتر باشد، نمی‌تواند توان یك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشد؛ بنابراین اگر $p^k = ۲^m - ۱$ باشد، $k=۱$ می‌شود یعنی $p = ۲^m - ۱$ عدد اول مرسه‌نا است.

اگر هم $p^k = ۲^m + ۱$ باشد، یا $k=۱$ است که در اینصورت $p = ۲^m + ۱$ عدد اول فرما است، یا $k>۱$، که در اینصورت داریم:

$$۲^m = p^k - ۱ = (p-۱)(p^{k-۱} + p^{k-۲} + \cdots + ۱)$$

و ضمناً $m>۱$. از اینجا نتیجه می‌شود که k باید عددی زوج باشد: $k = ۲l$ (l عددی طبیعی است)، یعنی داریم: $(p^l+۱)(p^l-۱) = ۲^m$.

بنابراین عددهای $p^l - ۱$ و $p^l + ۱$، که مخالف ۲ هستند، باید توانی از ۲ باشند: $p^l - ۱ = ۲$، $p^l + ۱ = ۴$، یعنی $p^l = ۳$ واز آنجا $p = ۳$، $۲^m = ۲.۴ = ۸$ یعنی $m = ۳$ که می‌دهد $۳^۲ = ۲^۳ + ۱$

به این ترتیب ثابت کردیم که اگر به‌ازای $n>۸$، عددهای n و $n+۱$ تنها یك مقسوم‌علیه اول داشته باشند، یا n عدد اول مرسه‌نا و یا $n+۱$ عدد اول فرما است. برعکس اگر $M_m = ۲^m - ۱$، عدد اول مرسه‌نا باشد، عددهای M_m و $M_m + ۱ = ۲^m$ تنها یك مقسوم‌علیه

اول دارند و اگر $F_k = ۲^{۲^k}+۱$ عدد اول فرما باشد هریك از عددهای $F_k - ۱ = ۲^{۲^k}$ و F_k تنها یك مقسوم‌علیه‌اول خواهند داشت. از اینجا صحت حکم قضیه ثابت می‌شود .

تبصره تا حالا ۲۹ عدد طبیعی n می‌شناسیم که به‌ازای آنها ، عددهای n و $n+۱$ دارای یك‌مقسوم‌علیه‌اول‌هستند. پنج جواب‌کوچکتر n عبارتست از $n = ۲,۳,۴,۷,۸$ و بزرگترین آنها عدد $n = ۲^{۱۱۲۱۳} - ۱$.

۱۰۳ . داریم : $۲^۲ - ۱ = ۳ ، ۲^۴ - ۱ = ۳.۵$ و همچنین داریم : $۲^{۲k} - ۱ = (۲^k - ۱)(۲^k + ۱)$. اگر برای $n = ۲k > ۴$، عدد $۲^{۲k} - ۱$ حاصلضرب دو عدد اول باشد، عددهای $۲^k - ۱$ و $۲^k + ۱$ بایداول‌باشند ولی از سه عدد $۲^k - ۱$ و ۲^k و $۲^k + ۱$ یکی بر ۳ قابل قسمت است (که البته ۲^k بر ۳ قابل قسمت نیست) . و چون به ازای $k > ۲$ ، هر دو عدد $۲^k - ۱$ و $۲^k + ۱$ از ۳ بزرگترند ، یکی از این عددها مرکب است . به این ترتیب وقتی n عددی زوج و بزرگتر از ۴ باشد ، عدد $۲^n - ۱$ حاصلضرب لااقل سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌شود.[۱]

اگر n فرد باشد ، داریم :

$$۲^۳ - ۱ = ۷ , ۲^۵ - ۱ = ۳۱ , ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷ , ۲^۹ - ۱ = ۷۰۷۳ ,$$

$$۲^{۱۱} - ۱ = ۲۳۰۸۹ , ۲^{۱۳} - ۱ = ۸۱۹۱ \quad \text{(عدداول)}$$

$$۲^{۱۵} - ۱ = ۷۰۳۱۰۱۵۱ ,$$

عددهای $۲^{۱۷} - ۱$ و $۲^{۱۹} - ۱$ اول و عدد $۷^۲ . ۱۲۷ . ۳۳۷ = ۲^{۲۱} - ۱$ و

---

۱) این استدلال از **ملنیکوو** ، مترجم روسی کتاب است .

$۲^{n}-۱$ از $۱۰^{۶}$ بزرگتر است . به این ترتیب همهٔ عددهای $۲^{۲۳}-۱$ $(n=۱,۲,\dots)$ که $۱۰^{۶}$ کوچکتر و حاصلضرب دو عدد اول هستند عبارتند از :

$$۲^{۴}-۱=۳\cdot۵,\quad ۲^{۹}-۱=۷\cdot۷۳,\quad ۲^{۱۱}-۱=۲۳\cdot۸۹$$

تبصره. از عددهای مرسه نا ، که بزرگتر از یك ملیون و به صورت حاصلضرب دو عدد اول باشند ، عبارتند از عددهای $M_n=۲^{n}-۱$ وقتی که داشته باشیم: $n=۲۳,۳۷,۴۹,۶۷,۱۰۱$. ما نمی‌دانیم که آیا تعداد اینگونه عددها محدود است یا نامحدود ،

۱۰۴ . چون $k\geqslant ۳$ است، $p_۱p_۲\cdots p_k\geqslant p_۱p_۲p_۳=۲\cdot۳\cdot۵>۶$ می‌شود و بنابراین، بنابر مسئلهٔ ۵۰ ، $p_۱p_۲\cdots p_k$ را می‌توان بصورت $a+b$ نوشت، بنحوی که a و b بزرگتر از واحد و نسبت بهم اول، و بنابراین نسبت به مجموعشان $p_۱p_۲\cdots p_k$ اول باشند. عددهای a و b مقسوم علیه‌های اول مختلفی دارند : فرض کنید a بر p و b بر q قابل قسمت و $p<q$ باشد . چون $p,p_۱p_۲\cdots p_k)=۱$) است ، پس $p\geqslant p_{k+۱}$ و چون $q>p$ بود $q\geqslant p_{k+۲}$ می‌شود و چون $p+q\leqslant a+b$ است ، بدست می‌آید :

$$p_{k+۱}+p_{k+۲}\leqslant p_۱p_۲\dots p_k$$

۱۰۵ . m را عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از ۳ و n را عددی طبیعی فرض می‌کنیم ، بنحوی که $n>p_۱p_۲\cdots p_m$ باشد . عدد طبیعی $k\geqslant m\geqslant ۴$ وجود دارد، بنحوی که داشته باشیم :

$$p_۱p_۲\cdots p_k\leqslant n<p_۱p_۲\dots p_kp_{k+۱} \qquad (۱)$$

اگر $q_n\geqslant p_{k+۱}+۱>p_{k+۱}$ باشد ، طبق تعریف عدد q_n ، هریك

از عددهای $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ مقسوم‌علیهی از عدد n هستند ، از آنجا $n \geqslant p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1}$ می‌شود که با (۱) متناقض است . به این ترتیب $q_n < p_{k+1} + 1 < p_k + p_{k+1}$ می‌شود و چون $k \geqslant 4$ است، بنابرمسئلهٔ ۱۰۴ ، $q_n < p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$ می‌شود و از آنجا، با توجه به(۱) ، بدست می‌آید : $\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{k} < \frac{1}{p_k} < \frac{q_n}{n}$. به‌این ترتیب ثابت کردیم که به‌ازای هر عدد طبیعی $m > 3$ ، وقتی‌که $n > p_1 p_2 \cdots p_m$ باشد ، $\frac{q_n}{n} < \frac{1}{m}$ می‌شود و از آنجا نتیجه می‌شود که نسبت $\frac{q_n}{n}$، وقتی که n غیر منفی و صعودی باشد . بسمت صفر میل می‌کند .

۱۰۶ . n را عدد طبیعی بزرگتر از ۴ فرض می‌کنیم . دراینصورت یا $n = 2k$ است (که k عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ است) و یا $n = 2k + 1$ (که k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است) . اگر $n = 2k$ باشد $(k > 2)$ ، طبق قضیهٔ چبیشف ، عدد اول p وجود دارد بنحوی که $k < p < 2k$ باشد ، ضمناً چون $p > k > 2$ است ، $p > 2$ می‌شود. ازآنجا $n = 2k < 2p < 4k = 2n$ می‌شودوچون $p < 2$است، $2p$ مساوی‌حاصلضرب دوعدد اول‌مختلف می‌شود وضمناً $n < 2p < 2n$ است،اگر $n = 2k + 1$باشد$(k \geqslant 2)$، طبق‌قضیهٔ چبیشف، عدداول‌pوجود دارد . بنحوی که $k < p < 2k$باشد ، از آنجا $3 \leqslant k + 1 \leqslant p < 2k$ و $n = 2k + 1 < 2k + 2 \leqslant 2p < 4k < 4k + 2 = 2n$می‌شود؛ بنابراین دوباره $n < 2p < 2n$ می‌شود و $2p$ مساوی حاصلضرب دو عدد اول مختلف می‌شود .

حالا فرض‌کنید ، n عددی طبیعی بزرگتر از ۱۵ باشد. اگر n مساوی یکی از عدد های ۱۶ ، ۱۷ ،...، ۲۹ باشد ، بین n و ۲n عدد ۲.۳.۵ = ۳۰ قرار دارد . بنابراین می‌توانیم $n \geqslant ۳۰$ در نظر بگیریم دراینصورت داریم : $n = ۶k + r$ که k عددی طبیعی‌وبزرگتر یا مساوی ۶ و r باقیماندهٔ تقسیم n بر ۶ است ، بنحوی که $۰ \leqslant r \leqslant ۵$ باشد . طبق قضیهٔ چبیشف ، عدد اول p وجود دارد ، بنحوی‌که $k < p < ۲k$ باشد ؛ بنابراین $p > ۵$ و $k + ۱ \leqslant p < ۲k$ می‌شود و از آنجا بدست می‌آید : $n = ۶k + r < ۶(k+۱) \leqslant ۲.۳.p < ۱۲k < ۲n$ ، بنحوی که خواهیم داشت : $n < ۲.۳.p < ۲n$ و $۲.۳.p$ حاصلضرب سه‌عدداول مختلف‌است.

۱۰۷ . p_k را k امین عدد اول ، s را عدد مفروض طبیعی‌بزرگتر از واحد و n را عدد طبیعی بزرگتر از $p_۱p_۲\cdots p_s$ فرض می‌کنیم. ثابت می‌کنیم‌که بین n و ۲n لااقل یك عددوجود داردکه مساوی حاصلضرب s عدد اول مختلف است .

$n = kp_۱p_۲\cdots p_{s-۱} + r$ می‌گیریم، که در آن r عبارتست از باقیماندهٔ تقسیم عدد n بر $p\,p_۲\cdots p_{s-۱}$. در اینجا $k > p_s$ (زیرا $n > p_۱p_۲\cdots p_s$ بود) و $۰ \leqslant r < p_۱p_۲\cdots p_{s-۱}$ است و از آنجا $k < p < ۲k$ و $k + ۱ \leqslant p < ۲k$ می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت :

$$n = p_۱p_۲\cdots p_{s-۱}k + r < p_۱p_۲\cdots p_{s+۱}(k+۱) \leqslant$$
$$\leqslant p_۱p_۲\cdots p_{s-۱}p < ۲p_۱p_۲\cdots p_{s-۱}k \leqslant ۲n,$$

بنحوی‌که $n < p_۱p_۲\cdots p_{s-۱}p < ۲n$ وضمناً $p > p_s$ است،دراینصورت

$p_1 p_2 \cdots p_{s-1} p$ مساوی حاصلضرب s عدد مختلف اول می‌شود .

۱۰۸ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که جملهٔ n ام از دنبالهٔ مفروض مساوی $\frac{1}{3}(10^n - 7)$ است . داریم :

$$10^2 \equiv 15 \equiv -2 \pmod{17} \quad \Rightarrow \quad 10^8 \equiv$$

$$\equiv 16 \equiv -1 \pmod{17} \quad \Rightarrow \quad 10^9 \equiv -10 \equiv 7 \pmod{17}$$

و چون داریم : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ ، نتیجه می‌شود :

$$10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

بنابراین عدد $\frac{1}{3}(10^{16k+9} - 7)$ بر ۱۷ قابل قسمت است ، یعنی عدد $\frac{1}{3}(10^{16k+9} - 7)$ به ازای $k = 0, 1, 2, \cdots$ ، عددی است مرکب (زیرا همهٔ آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{3}(10^9 - 7)$ و بنابراین بزرگتر از ۱۷ هستند) . **مونکوسکی** ، به‌کمك جدول عددهای اول ، ثابت کرد که عدد $\frac{1}{3}(10^n - 7)$ وقتی n مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ باشد ، عددی است اول . بنابراین کوچکترین عدد مرکب از این دنباله چنین است :

$$\frac{1}{3}(10^9 - 7) = 333\,333\,331$$

طبعاً این سئوال پیش می‌آید : آیا عددهای مرکب دیگری در این دنباله ، غیر از آنچه که پیدا کردیم ، وجود دارد یا نه ؟ بترتیب داریم :

$$۱۰^{۲}\equiv ۵(\mathrm{mod}\,۱۹) \Longrightarrow ۱۰^{۴}\equiv ۲۵\equiv ۶(\mathrm{mod}\,۱۹) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ۱۰^{۱۲}\equiv ۶^{۳}\equiv ۷(\mathrm{mod}\,۱۹)\ ,$$

و چون $۱۰^{۱۸k}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۱۹)\ (k=۰,۱,۲,\dots)$ است ، بنابراین عدد $\frac{۱}{۳}(۱۰^{۱۸k+۱۲}-۷)$ بر ۱۹ قابل قسمت است $(k=۰,۱,۲,\dots)$. به‌این ترتیب مثلا عدد $\frac{۱}{۳}(۱۰^{۱۲}-۷)$ هم عددی است مرکب .

معلوم نیست که آیا عددهای اول دیگری به‌اینصورت، علاوه‌بر آنچه که در بالا دادیم ، وجود دارد و آیا تعداد آنها بی‌نهایت است یا نه ؟

۱۰۹ . عدد مورد نظر $n=۵$ است ، زیرا عددهای

$$۱^{۴}+۲^{۴}=۱۷,۲^{۴}+۳^{۴}=۹۷,۳^{۴}+۴^{۴}=۳۳۷,۴^{۴}+۵^{۴}=۸۷۱,$$

اول هستند ، ولی $۱۷۰۱۱۳=۱۹۲۱=۶^{۴}+۵^{۴}$ عددی است مرکب .

۱۱۰ . مثلا عددهای $۱۰^{۶k+۴}+۳\ (k=۰,۱,\dots)$ مرکب‌هستند، زیرا همهٔ آنها بر ۷ قابل قسمت‌اند . در حقیقت بسادگی می‌توان تحقیق کرد : $۱۰^{۴}\equiv ۴(\mathrm{mod}\,۷)$ ، و چون طبق قضیهٔ فرما $۱۰^{۶}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۷)$ بنابراین (برای عدد طبیعی k) داریم:

$$۱۰^{۶k+۴}+۳\equiv ۱۰^{۴}+۳\equiv ۴+۳\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۷)$$

تبصره. معلوم نیست که آیا بین عددهای بصورت $۱۰^{n}+۳\ (n=۱,۲,\dots)$، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد یا نه . این عددها به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ اولند ، ولی به‌ازای $n=۳$ و $n=۴$ مرکب‌اند (زیرا $۱۰۰۳=۱۷\cdot ۵۹$ و $۱۰^{۴}+۳$ هم بر ۷ قابل قسمت است).

۱۱۱ . از اتحاد (برای عدد طبیعی n)

$$۲^{۴n+۲}+۱=(۲^{۲n+۱}-۲^{n+۱}+۱)(۲^{۲n+۱}+۲^{n+۱}+۱) \quad (۱)$$

و اینکه $۲^{۴n+۲}+۱$ بر $۲^{۲}+۱$ یعنی ۵ قابل قسمت‌است و اینکه برای عدد طبیعی $n>۱$ داریم :

$$۲^{۲n+۱}-۲^{n+۱}+۱=۲^{n+۱}(۲^{n}-۱)+۱\geqslant ۲^{۳.۳}+۱=۲۵$$

نتیجه می‌شود که لااقل یکی از عوامل سمت راست اتحاد (۱) بر ۵قابل قسمت است و در تقسیم بر ۵ (به‌ازای $n>۱$) ، خارج قسمت زوجی بزرگتر از واحد می‌دهد. از اینجا نتیجه‌می‌شودکه عدد $\frac{۱}{۵}(۲^{۴n+۲}+۱)$ به ازای $n=۲,۳,...$ مساوی حاصلضرب دو عددطبیعی بزرگتر ازواحد می‌شود و عددی است مرکب .

۱۱۲ . m را عدد طبیعی بزرگتر ازواحدمی‌گیریم‌وفرض‌می‌کنیم $n=m!+k$ باشد$(k=۲,۳,...,m)$. چون دراینجا $k<m!+k$ و $m!+k$ بر kقابل‌قسمت‌است، $۲^{m!+k}-۱<۲^{m!+k}-۱$ و $۲^{k}-۱$ بر $۲^{m!+k}-۱$ قابل قسمت می‌شود ، یعنی $۲^{m!+k}-۱$ ، عددی است مرکب $(k=۲,۳,...,m)$. بنابراین فاصله‌ای از دنبالهٔ $۲^{n}-۱$ بدست می‌آید که از $m-۱$ عدد مرکب تشکیل شده است .

۱۱۳ . مثلا عدد ۲۰۰ را انتخاب می‌کنیم . برای اینکه آنرا به عدد اول تبدیل‌کنیم ، باید رقم آخر آنرا با رقمی فرد عوض کرد . ولی ۲۰۱ بر ۳ ، ۲۰۳ بر ۷ ، ۲۰۵ بر ۵ ، ۲۰۷ بر ۳ و ۲۰۹ بر ۱۱ قابل قسمت است . به این ترتیب تنها با تغییر یکی از رقمهای عدد ۲۰۰ نمی‌توان آنرا به عددی اول تبدیل‌کرد .

تبصره. معلوم نیست که آیا همیشه می‌توان با تعویض دو رقم از یك عدد، آنرا به عددی اول تبدیل کرد یا نه.

می‌توان بسادگی ثابت کرد که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که با تعویض یکی از رقمهای آن (به‌شرطی که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ نوشته شده باشد) نتوان یك عدد اول بدست آورد. مثلا عددهای $n=۲۳۱۰k-۲۱۰ \quad (k=۱,۲,۳,\dots)$ از این قبیل‌اند، زیرا در اینحالت باید رقم آخر عدد n را تغییر داد (یعنی صفر را). و بسهولت می‌توان تحقیق کرد که $n+۱$ بر ۱۱، $n+۳$ بر ۳، $n+۷$ بر ۷ و $n+۹$ بر ۳ قابل قسمت و بنابراین با تعویض یکی از رقمهای عدد n، همیشه عددی مرکب بدست می‌آید.

۱۱۴. فرض می‌کنیم که قضیهٔ C صحیح باشد، واضح است که قضیهٔ T برای $n=۲$ و $n=۳$ صحیح است. بنابراین می‌توان n را عدد طبیعی بزرگتر از ۳ در نظر گرفت. اگر $n=۲k$، عددی زوج باشد، چون $n>۳$ است، $k>۱$ می‌شود و بنابه قضیهٔ چبیشف، عدد اول p وجود دارد، بنحوی که $k<p<۲k$ باشد، از آنجا $p<n<۲p$ می‌شود، یعنی n مقسوم‌علیهی از نمای واحد در حاصلضرب $n!=۱.۲\dots n$ می‌باشد.

اگر هم $n=۲k+۱$ باشد، که k عدد طبیعی بزرگتر از واحد است (زیرا $n>۳$ بود)، طبق قضیهٔ C عدد اول p وجود دارد بنحوی که $k<p<۲k<n$ باشد، از آنجا $p\leqslant k+۱$ می‌شود و بنابراین $p<n<۲p$ و $۲k+۱<۲p$ خواهد بود و مثل حالت قبل نتیجه می‌گیریم که p در تجزیهٔ $n!$ به عوامل اول، نمائی مساوی واحد دارد.

به‌این ترتیب از قضیهٔ C ، قضیهٔ T را نتیجه گرفتیم .

حالا فرض می‌کنیم که قضیهٔ T صحیح باشد ؛ n را عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌گیریم . طبق قضیهٔ T ، عدد اول p وجود دارد که در تجزیهٔ عدد !(۲n) به عوامل اول ، نمائی مساوی واحددارد . به‌این ترتیب داریم $p<2n<2p$ (زیرا اگر $2p\leqslant 2n$ باشد، حاصلضرب $2n\cdot(2n-1)\cdots 10\cdot 2=(2n)!$ ، عوامل p و ۲p وجود خواهد داشت و بنابراین ، عدد p درتجزیهٔ‌این‌حاصلضرب به‌عوامل‌اول ، نمائی بزرگتر یا مساوی ۲ خواهد داشت‌که‌برخلاف قضیهٔ T است) . از آنجا $n<p<2n$ می‌شود. به‌این ترتیب ازقضیهٔ T ، قضیهٔ C بدست‌می‌آید و قضایای C و T هم‌ارزند .

۱۱۵ . در تجزیهٔ عدد !۱۱ به عوامل اول ، عددهای ۷ و ۱۱ با نمای واحد ظاهر می‌شوند. بنابراین می‌توانیم $11<n$ در نظربگیریم بنحوی که هم در حالت $n=2k$ و هم در حالت $n=2k+1$ داریم $k>5$ ، یعنی طبق قضیه‌ای‌که در شرط مسئله ذکر کردیم ، دو عدد اول p و q وجود دارد، بنحوی‌که $k<p<q<2k$ باشد . از آنجا در هر حالت داریم $p<q<n$ و $p\geqslant k+1$. یعنی در هر حالت $n<2p<2q$ می‌شود که براساس آن نتیجه می‌گیریم که هم عدد اول p و هم عدد اول q در تجزیهٔ عدد !n به‌عوامل اول، نمائی‌مساوی واحد دارند .

درمورد !۱۵ ، اگر به عوامل اول تجزیه شود، تنها عدد اول ۷، نمائی مساوی واحد دارد .

۱۱۶ . n را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم . طبق قضیهٔ

دیریکله‌دربارهٔتصاعدحسابی، عدداول p بصورت $p=۶^n k+۲.۳^{۲^{n-۱}}-۱$ وجود دارد (k عددی طبیعی است). ازآنجا (چون $n\geqslant ۲^{n-۱}$ است) ، $p+۱$ بر ۳^n قابل قسمت می‌شود و عدد $p+۱$ بیش از n مقسوم علیه طبیعی مختلف دارد (مثلا عددهای $۱،۳،۳^۲،...،۳^n$) . همچنین طبق قضیهٔ اولر داریم : $۳^{\varphi(۲^n)}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۲^n)$ ، از آنجا $۳^{۲^{n-۱}}-۱$ بر ۲^n قابل قسمت ، یعنی $p-۱$ بر ۲^n قابل قسمت است و عدد $p-۱$ بیش‌از n مقسوم‌علیه طبیعی‌مختلف خواهدداشت(مثلاً عددهای $۱،۲،۲^۲،...،۲^n$) .

۱۱۷. n را عدد طبیعی مفرض و p_i را i امین عدد اول در در نظرمی‌گیریم . براساس قضیهٔ چینی‌دربارهٔ باقیمانده‌ها . عدد طبیعی b وجود دارد ، بنحوی‌که داشته باشیم :

$$b\equiv ۱(\mathrm{mod}\,p_۱p_۲\cdots p_n)\ ;\ b\equiv -۱(\mathrm{mod}\,p_{n+۱}p_{n+۲}\cdots p_{۲n})\ ;$$

$$b\equiv -۲(\mathrm{mod}\,p_{۲n+۱}p_{۲n+۲}\cdots p_{۳n})$$

چون $(b,\ p_۱p_۲\cdots p_{۳n})=۱$ ، طبق قضیهٔ دیریکله عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی که $p=p_۱p_۲\cdots p_{۳n}k+b$ ،عدی اول‌باشد.دراینحالت $b-۱$ بر p_i برای $i=۱,۲,\cdots,n$ قابل‌قسمت است ؛ بنابراین $p-۱$ بر p_i $(i=۱,۲,\cdots,n)$ قابل قسمت است، همچنین $b+۱$ بر p_i برای $i=n+۱,n+۲,\cdots,۲n$ قابل قسمت می‌شود و ازآنجا $p+۱$ بر p_i $(i=n+۱,n+۲,\cdots,۲n)$ قابل قسمت است ، بهمین ترتیب $p+۲$ هم بر p_i برای $i=۲n+۱,۲n+۲\cdots,۳n$ قابل قسمت می‌شود . بنابراین هریك‌ازعددهای $p-۱$ ، $p+۱$ و $p+۲$ لااقل n مقسوم‌علیه

مختلف اول دارند .

۱۱۸ . اگر به‌ازای عدد طبیعی m ، عدد $m!$ بر عدد اول p قابل قسمت باشد ، باید p مقسوم‌علیه لااقل یکی از عوامل حاصلضرب $m!=۱.۲...m$ باشد ، یعنی $p\leqslant m$ است . بنابراین اگر عدد $m!$ بر عدد طبیعی $a>m$ قابل قسمت باشد ، باید a عددی مرکب باشد . به‌این ترتیب اگر به‌ازای عدد طبیعی $n>۱$ ، عدد $(n-۱)!$ بر n یا $n+۲$ قابل قسمت‌باشد، عدد n یا $n+۲$ مرکب خواهندبود. بنابراین شرط مسئله لازم است .

حالا فرض می‌کنیم که برای عدد مفروض فرد $n>۱$ ، عدد $(n-۱)!$ نه بر n و نه بر $n+۲$ قابل قسمت نباشد .

ثابت می‌کنیم‌که عددهای n و $n+۲$ اولند. اگر n عددی‌مرکب باشد ، مثلاً $n=ab$ است ، که a و b عددهای طبیعی کوچکتر از n هستند، یعنی $a\leqslant n-۱$ و $b\leqslant n-۱$ وبنابراین‌عددهای a و bعواملی از حاصلضرب $(n-۱)!=۱.۲...(n-۱)$ هستند . از آنجا در حالت $a\neq b$ باید $(n-۱)!$ بر ab قابل قسمت باشدکه مخالف فرض است . در حالت $a=b$ داریم $n=a^۲$ و چون n عددی فرد وبزرگتر از واحد است،$a\geqslant ۳$ می‌شود. بنابراین$۲a<۳a\leqslant n=a^۲$ و از آنجا $۲a\leqslant n-۱$ به این ترتیب ، عددهای a و $۲a$ عوامل مختلفی از حاصلضرب $(n-۱)!=۱.۲...(n-۱)$ هستند و از آنجا $(n-۱)!$ بر $n=a^۲$ قابل قسمت می‌شودکه مخالف فرض است ، بنابراین عدد n اول است .

اگر عدد $n+۲$ مرکب باشد، $n+۲=ab$ می‌شود ، که در آن

a و b عددهای طبیعی بزرگتر از واحد و چون n عددی فرد است، این دو عدد هم فرد وبزرگتر یا مساوی۳ هستند ، ازآنجا چون $n \geqslant ۷$ است، $\frac{n-۱}{۲} \leqslant \frac{n+۲}{۳} \leqslant a$ می‌شود .

به‌این ترتیب $۲a \leqslant n-۱$ است؛ بهمین ترتیب معلوم می‌شودکه $۲b \leqslant n-۱$ است . اگر a و b عددهای مختلفی باشند، عوامل‌مختلفی از حاصلضرب $(n-۱)! = (n-۱)\ldots۲.۱$ می‌شود ، از آنجا برخلاف فرض $(n-۱)!$ بر $ab = u+۲$ قابل قسمت می‌شود . اگر هم $a=b$ باشد ، a و $۲b$ عوامل مختلفی از حاصلضرب $(n-۱)!$ می‌شود و از آنجا دوباره برخلاف فرض $(n-۱)!$ بر $۲ab$ و درنتیجه بر $n+۲$قابل قسمت می‌شود .

به‌این ترتیب ، شرط مسئله کافی هم هست .

۱۱۹ . m را عدد مفروض طبیعی در نظر می‌گیریم . چون $۱ = (۱-۱۰^m, ۱۰^m)$ است ، طبق قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی، عدد طبیعی k وجوددارد، بنحوی‌که عدد $p = ۱۰^m k + ۱۰^m - ۱$عددی اول باشد ، چون m رقم آخر عدد p مساوی ۹ است ، نتیجه می‌شودکه مجموع همهٔ رقمهای عدد p بزرگتر از m است .

تبصره . آ.مونکوسکی متذکر می‌شود که این قضیه در هـر دستگاه عدد شماری به مبنای طبیعی $q>۱$ صحیح است ؛ برای این منظور ، باید در اثبات فوق بجای ۱۰ ، عدد q را در نظر بگیریم .

معلوم نیست که آیا مجموع رقمهای عدد اول ، همراه باخودعدد بطور نامحدود صعودی است یا نه .

۱۲۰ . m را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم . چون $(۱۰^m, ۱)=۱$ است ، براساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی ، عدد طبیعی **k** وجود دارد ، بنحوی‌که $p=۱۰^{m+۱}k+۱$ عددی‌اول باشد. واضح است که $m+۱$ رقم آخر عدد **p** از **m** صفر و به دنبال آنها واحد، تشکیل شده است . بنابراین در نوشتن عدد اول **p** در عدد شماری به‌مبنای ۱۰ ، لااقل **m** صفر وجود دارد .

تبصره. معلوم نیست که آیا برای هر عدد طبیعی **m** ، چنان عدد اولی وجود دارد ، بنحوی که در دستگاه عددشماری به مبنای ۱۰ ، درست شامل **m** صفر باشد . برای $m=۱$ ، کوچکترین ایـن عددهـا ۱۰۱ و برای $m=۲$ ، ۱۰۰۹ می‌باشد .

۱۲۱ . اگر **p** عددی اول باشد ، مجموع همهٔ مقسوم علیه های طبیعی عـدد $p^۴$ عبارتست از $۱+p+p^۲+p^۳+p^۴$. اگـر $۱+p+p^۲+p^۳+p^۴=n^۲$ باشد ، بسادگی می‌توان روشن کرد که نامساویهای زیر برقرار است :

$$(۲p^۲+p)^۲<(۲n)^۲<(۲p^۲+p+۲)^۲$$

که از آنها تساوی $(۲n)^۲=(۲p^۲+p+۱)^۲$ نتیجه می‌شود ، یعنی $۴n^۲=۴p^۴+۴p^۳+۵p^۲+۲p+۱$ ، و چون از طرف دیگر $۴n^۲=۴(p^۴+p^۳+p^۲+p+۱)$ باشد که $p^۲-۲p-۳=۰$ ، باید از آنجا $p=۳$ بدست می‌آید . در حقیقت برای $p=۳$ داریم : $۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴=۱۱^۲$. بنابراین تنها یك عدد اول $p=۳$ وجود دارد که در شرط مسئله صدق می‌کند .

۱۲۲ . عدد اول p ، تنهادومقسوم‌علیه‌طبیعی ۱ و p دارد. بنابراین اگر مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد اول p مساوی توان s ام عدد طبیعی n باشد ، باید $p+۱=n^s$ شود و ازآنجا داشته باشیم :

$$p=n^s-۱=(n-۱)(n^{s-۱}+n^{s-۲}+\cdots+۱)$$

در اینجا $n>۱$ است و برای $s\geqslant ۲$ ، عامل اول سمت راست تساوی اخیراز عامل دوم‌آن کوچکتر است . به این ترتیب تجزیهٔ عدد اول p به دو عامل طبیعی بدست می‌آید که عامل اول آن کوچکتر از عامل دوم آنست .

از اینجا نتیجه می‌شود که عامل اول مساوی واحد است ، یعنی $n-۱=۱$ ؛ بنابراین $n=۲$ و $p=۲^s-۱$. بنابراین برای هر عدد طبیعی $s\geqslant ۲$ بیش از یك عدد اول وجود نداردکه در شرط مسئله صدق کند ، و چنین عددی تنها وقتی وجود داردکه $۲^s-۱$ عددی اول باشد . برای $s=۲$ این عدد مساوی ۳ می‌شود ، برای $s=۳$ مساوی ۷ . برای $s=۵$ مساوی ۳۱، برای $s=۷$ مساوی ۱۲۷ بدست می‌آید . وقتی s مساوی یکی از عددهای۴ ، ۶ ، ۸ و ۱۰ باشد ، بترتیب عددهای مرکب $۲^۴-۱=۳.۵$ ، $۲^۶-۱=۳^۲.۷$ ، $۲^۸-۱=۳.۵.۱۷$ و بالاخره $۲^{۱۰}-۱=۳.۱۱.۳۱$ بدست می‌آید .

۱۲۳ . برای عددهای اول $p>۵$داریم :

$$۲<\frac{p-۱}{۲}<p-۱$$

ازآنجا $(p-۱)!$ بر $\frac{p-۱}{۲}(p-۱)=۲.(p-۱)^۲$ قابل قسمت است .

فرض می‌کنیم که برای عدد اول $p>5$ ، به‌ازای یک مقدار طبیعی m داشته باشیم :

$$(p-1)!+1=p^m \qquad (1)$$

از آنجا p^m-1 بر $(p-1)^2$ قابل قسمت می‌شود که در نتیجه باید $p+1+\dots+p^{m-2}+p^{m-1}$ بر $p-1$ ، یعنی m بر $p-1$ قابل قسمت باشد ، از آنجا $m\geqslant p-1$ می‌شود و بنابراین باید داشته باشیم :

$$p^m\geqslant p^{p-1}>(p-1)^{p-1}>(p-1)!$$

به‌این ترتیب $p^m>(p-1)!+1$ می‌شود که با فرض (۱) مخالف است .

۱۲۴ . بنابر مسئلهٔ لیوویل (مسئلهٔ ۱۲۳ را ببینید) ، اگر p عدد اول بزرگتر از ۵ باشد، برای عدد طبیعی m ، تساوی $p^m+1+(p-1)!$ ممکن نیست . عدد فرد $(p-1)!+1$ از واحد بزرگتر است و بنابراین دارای مقسوم‌علیه فرد $q\neq p$ می‌باشد. از قابل قسمت بودن $(p-1)!+1$ بر q نتیجه می‌شود که $q-p>1$ است و بنابراین (چون $q\neq p$ بود) $q>p$ می‌شود . حالا با توجه به اینکه p می‌تواند عدد اول دلخواهی باشد ، نتیجه می‌گیریم که تعداد عددهای اول q که برای آنها به‌ازای $p<q$ ، $(p-1)!+1$ بر q قابل قسمت باشد ، بی‌نهایت است .

۱۲۵* . راه حل **آ . شینتسل** را می‌آوریم .

a را عدد طبیعی دلخواه و k را عدد صحیح مخالف واحد فرض

می‌کنیم . $k-1=2^s h$ می‌گیریم ،که در آن 2^s بزرگترین توانی از ۲ است که $k-1$ را عاد می‌کند و h عددی فرد که می‌تواند مثبت یا منفی باشد . عدد طبیعی m را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $2^{2^m}>a-k$ و t را عدد طبیعی می‌گیریم بنحوی که $t\geqslant m$و$t\geqslant s$ باشد . اگر عدد $2^{2^t}+k\geqslant 2^{2^m}+k>a$ مرکب باشد ، عدد مرکبی بصورت مورد نظر و بزرگتر از a خواهیم داشت . بنابراین‌فرض‌می‌کنیم $p=2^{2^t}+k$ عددی اول باشد . چون $t\geqslant s$ و $k-1=2^s h$ است ، $p-1=2^{2^t}+k-1=2^s h_1$ می‌شودکه در آن h_1 عددی فرد ومثبت است .

بنابر قضیهٔ اولر داریم : $2^{\varphi(h_1)}\equiv 1 (\mathrm{mod} h_1)$ ، یعنی (چون $p-1=2^s h_1$ بود) ، $2^{s+\varphi(h_1)}\equiv 2^s (\mathrm{mod} p-1)$ می‌شود،ازآنجا باتوجه‌به‌اینکه$t\geqslant s$است، بدست‌می‌آید $2^{t+\varphi(h_1)}\equiv 2^t (\mathrm{mod} p-1)$.

بالاخره ، بنابر قضیهٔ‌کوچك فرما داریم :

$$2^{2^{t+\varphi(h_1)}}+k\equiv 2^{2^t}+k\equiv 0 (\mathrm{mod} p)$$

وچون $2^{2^{t+\varphi(h_1)}}+k$ است، $2^{t+\varphi(h_1)}>2^t$ بزرگتر از $2^{2^t}+k=p$ می‌شود و $2^{2^{t+\varphi(h_1)}}+k$ عددی مرکب و بزرگتر از a خواهد بود ، زیرا داریم: $p=2^{2^t}+k\geqslant 2^{2^m}+k>a$.

قضیه ثابت شد . از حالت $k=1$ اطلاع نداریم، زیرا نمی‌دانیم که آیا تعداد عددهای مرکب فرما بی‌نهایت است یا نه .

متذکر می‌شویم‌که‌حکم ضعیف‌تری از آنچه‌که در بالا ثابت‌کردیم یعنی اینکه برای هر عدد صحیح k لااقل یك عدد طبیعی n وجوددارد

بنحوی که عدد $k+2^{2^n}$ مرکب باشد ، در سال ۱۹۴۳ بوسیلهٔ **ای . رینر** (I.Reiner) به‌عنوان حالت‌خاصی ازیك قضیهٔ کلی ، ثابت شد . برای اینکه این حکم ضعیف از اثبات ما (برای $k=1$) بدست آید ، کافی است توجه‌کنیم‌که عدد $2^{2^5}+1$ مرکب و بر ۶۴۱ قابل‌قسمت است .

۱۲۶ . مثلا همهٔ عددهای $k=6t-1$ (t عددی صحیح و مثبت است) دارای این خاصیت‌اند . زیرا برای هر عدد طبیعی n ، عدد 2^{2^n} در تقسیم بر ۳ ، باقیمانده‌ای مساوی واحد می‌دهد ، بنابراین عدد $2^{2^n}+k=2^{2^n}-1+6t$ بزرگتر از ۳ و مضربی از ۳ ، یعنی عددی مرکب است .

۱۲۷ . a) اگر n عددی طبیعی باشد ، $2^{2^n}-1$ بر ۳ قابل قسمت است ، بنابراین عدد $2^{2^{n+1}}-2=2(2^{2^n}-1)$ بر ۶ قابل قسمت است ومی‌توان $2^{2^{n+1}}=6k+2$ فرض‌کرد، که در آن k عددی است طبیعی، از آنجا بدست می‌آید :

$$2^{2^{2n+1}}+3=(2^6)^k.2^2+3\equiv 0 \pmod 7$$

بنابراین $2^{2^{2n+1}}+3$ ، به‌ازای $n=1,2,\ldots$ ، بر ۷ قابل قسمت است و ضمناً داریم :

$$2^{2^{2n+1}}+3\geqslant 2^{2^3}+3>7$$

یعنی $2^{2^{2n+1}}+3$ ، به‌ازای $n=1,2,\ldots$ ، عددی است مرکب .

b) اگر n عددی‌طبیعی‌باشد، $2^{4n}-1=16^n-1$ بر ۵ وبنابراین $2^{4n+1}-2$ بر ۱۰ قابل قسمت است . در نتیجه می‌توان فرض کرد :

$۲^{۴n+۱}=۱۰k+۲$ (k عددی است طبیعی) . و از آنجا داریم :

$$۲^{۲^{۴n+۱}}+۷\equiv(۲^{۱۰})^{k}.۲^{۲}+۷\equiv۲^{۲}+۷\equiv۰(\mathrm{mod}۱۱)$$

یعنی $۲^{۲^{۴n+۱}}+۷$ بر ۱۱ قابل قسمت و ضمناً از $۲^{۲^{۵}}+۷$ بزرگتر یا مساوی آن ، یعنی از ۱۱ بزرگتراست . بنابراین $۲^{۲^{۴n+۱}}+۷$ ، به‌ازای $n=۱,۲,...$ عددی است مرکب .

c) اگر n عددی طبیعی باشد، عدد $۲^{۶n}-۱=(۶۴)^{n}-۱$ بر ۷ و بنابراین عدد $۲^{۶n+۲}-۲^{۲}$ بر ۲۸ قابل قسمت است ، یعنی می‌توان $۲^{۶n+۲}=۲۸k+۴$ فرض کرد (k عددی طبیعی است) و در نتیجه خواهیم داشت :

$$۲^{۲^{۶n+۲}}=(۲^{۲۸})^{k}.۲^{۴}\equiv۱۶(\mathrm{mod}۲۹)$$

و بنابراین $۲^{۲^{۶n+۲}}+۱۳$ بر ۲۹ قابل قسمت و ضمناً بزرگتر یا مساوی $۲^{۲^{۸}}+۱۳$ ، یعنی بزرگتر از ۲۹ است . یعنی $۲^{۲^{۶n+۲}}+۱۳$ عددی است مرکب (به‌ازای $n=۱,۲,...$) .

d) به‌ازای هرعدد طبیعی n ، عدد $(۲^{۱۰})^{n}-۱$ بر ۱۱ وبنابراین $۲^{۱۰n+۱}-۲$ بر۲۲ قابل‌قسمت‌است‌واز آنجامی‌توان $۲^{۱۰n+۱}=۲۲k+۲$ فرض کرد (k عددی طبیعی است) و نوشت :

$$۲^{۲^{۱۰n+۱}}=(۲^{۲۲})^{k}.۲^{۲}\equiv۴\ \mathrm{mod}۲۳)$$

در نتیجه $۲^{۲^{۱۰n+۱}}+۱۹$ بر ۲۳ قابل قسمت است و چون ، وقتی $n=۱,۲,...$ باشد ، از ۲۳ بزرگتر است عددی مرکب می‌شود .

e) اگر n عددی طبیعی باشد ، $۲^{۶n}-۱=(۲^۳)^{۲n}-۱$ بر ۹ و بنابراین $۲^{۶n+۲}-۲^۲$ بر ۳۶ قابل قسمت است و می‌توان $۲^{۶n+۲}=۳۶k+۴$ (k عددی طبیعی است) فرض کرد . یعنی :

$$۲^{۲^{۶n+۲}}=(۲^{۳۶})^k\cdot ۱۶\equiv ۱۶(\mathrm{mod}\,۳۷)$$

در نتیجه $۲۱+۲^{۲^{۶n+۲}}$ بر ۳۷ قابل قسمت وضمناً ، برای $n=۱,۲,\ldots$ از ۳۷ بزرگتر است ، یعنی $۲۱+۲^{۲^{۶n+۲}}$ عددی است مرکب .

تبصره. حتی برای یك عدد صحیح k هم ثابت نشده است که آیا بین عددهای $۲^{۲^n}+k$ $(n=۱,۲,\ldots)$ ، بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد یا نه.

۱۲۸ ✪ . می‌دانیم که عدد $F_m=۲^{۲^m}+۱$ ، وقتی که m مساوی یکی از عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ باشد ، اول است و عدد $F_۵=۶۴۱p$ می‌باشد ، که در آن p عددی است اول و بزرگتر از $F_۴=۲^{۱۶}+۱$. علاوه بر آن $F_۵$ بر p قابل قسمت است ، داریم :

$$(p,F_۵-۲)=۱ \quad\Longrightarrow\quad (p,۲^{۳۲}-۱)=۱$$

بنابراین قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ؛ بی‌نهایت عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی در همنهشتیهای زیر صدق کند :

$$k\equiv ۱[\mathrm{mod}(۲^{۳۲}-۱).۶۴۱] \text{ و } k\equiv -۱(\mathrm{mod}\,p) \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که اگر k عددی طبیعی و بزرگتر از p باشد و در همنهشتیهای (۱) صدق کند ، همهٔ عددهای $k\cdot ۲^n+۱$ $(n=۱,۲,\ldots)$ مرکب هستند .

عدد n را می‌توان به صورت $n=2^m(2t+1)$ گرفت (m و t عددهای صحیح غیر منفی هستند) . ابتدا m را یکی از عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ یا ۴ می‌گیریم . بر اساس اولین همنهشتی (۱) داریم :

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2^{2^m(2t+1)}+1 \pmod{(2^{32}-1)} \qquad (2)$$

چون ، وقتی m یکی‌ازعددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ یا ۴باشد ، $2^{32}-1$ بر F_m و $2^{2^m(2t+1)}+1$ بر F_m قابل‌قسمت است ، بنابر (۲) ، $k\cdot 2^n+1$ بر F_m قابل قسمت می‌شود و با توجه به اینکه داریم :

$$k\cdot 2^n+1>k>p>F_4$$

عدد $k\cdot 2^n+1$ مرکب می‌شود .

حالا باید به‌حالتی بپردازیم‌که $m\geqslant 6$ است . n بر 2^6 قابل‌قسمت و بنابراین $n=2^6.h$ است (h عددی‌طبیعی‌است) . براساس‌همنهشتی دوم (۱)داریم: $k\cdot 2^n+1\equiv -2^{2^6.h}+1 \pmod p$ ،وچون $2^{2^6.h}-1$ بر $2^{2^5}+1$ و عدد اخیر بر p قابل قسمت است ، $k\cdot 2^n+1$ بر p قابل قسمت می‌شود و بنابراین ، با توجه به‌اینکه $k\cdot 2^n+1>k>p$ است عدد $k\cdot 2^n+1$ مرکب می‌شود .

تبصره. نمی‌دانیم‌که‌کوچکترین عدد kکدام است، که به‌ازای آن هر یك از عددهای $k\cdot 2^n+1$ ($n=1,2,\ldots$) مرکب باشد .

۱۲۹* . قبلا متذکر می‌شویم که در اثبات مسئلهٔ ۱۲۸ ، می‌توان به‌همنهشتیهای (۱)، همنهشتی $k\equiv 1 \pmod 2$ را اضافه‌کرد، بنحوی‌که قضیهٔ T را بدست‌آوریم : بی‌نهایت عدد فرد $k>p$ وجود دارد، بنحوی

که هر یك از عددهای $p.۲^l+۱ \quad (l=۱,۲,\ldots)$ ، لااقل بـر یکی از شش عدد اول

$$F_۰,F_۱,F_۲,F_۳,F_۴,p \qquad (۳)$$

قابل قسمت باشند $(p>F_۴)$. حاصلضرب شش عدد (۳) را Q فرض می‌کنیم .

چون این عدد فرد است ، $۲^{\varphi(Q)}\equiv ۱ \pmod Q$ می‌شود ودر نتیجه $۲^{\varphi(Q)}\equiv ۱ \pmod q$ ، که در آن q یکی ازعددهای (۳) است . n را عددی طبیعی می‌گیریم . بنابر قضیهٔ T (برای $l=n[\varphi(Q)-۱]$) ، عدد $k.۲^{n[\varphi(Q)-۱]}+۱$ لااقل بر یکی ازعددهای (۳) قابل‌قسمت است که آنرا به q نشان‌می‌دهیم. بنابراین $k.۲^{n[\varphi(Q)-۱]}+۱\equiv ۰ \pmod q$ و از آنجا بـا ضرب طـرفین همنهشتی در ۲^n بـدست مـی‌آیـد : $۲^{\varphi(Q)}\equiv ۱ \pmod q$ در نتیجه باتوجه به $k.۲^{n\varphi(Q)}+۲^n\equiv ۰ \pmod q$ یعنی $۲^{n\varphi(Q)}\equiv ۱ \pmod q$ ، بـدست می‌آید : $k+۲^n\equiv ۰ \pmod q$ و چون $k>p$ و بنابراین $k>q$ و $k+۲^n>q$ است ، از همنهشتی اخیر معلوم می‌شودکه $k+۲^n$ عددی است مرکب .

بنابراین بی‌نهایت عدد طبیعی و فرد k وجود دارد ، که به ازای آنها ، همهٔ عددهای $k+۲^n \quad (n=۱,۲,\ldots)$ مرکب‌اند .

۱۳۰ . فرض‌کنید $k=۲^m$ و m عددی طبیعی باشد ، و فـرض کنید $m=۲^s.h$ ، که در آن $s\geqslant ۰$ عددی‌صحیح و h عددی فرد است در اینصورت داریم :

$$k.۲^{۲^n}+۱=۲^{۲^s(۲^{n-s}+h)}+۱$$

و چون به‌ازای $n>s$ ، عدد $k.2^{2n}+1$ طبیعی وفرد است، $2^{n-s}+h$ بر $2^{2s}+1$ قابل قسمت می‌شود . و بنابراین ، با توجه به اینکه به‌ازای $n>s$ داریم : $k.2^{2n}+1>2^{2s}+1$ ، عدد $k.2^{2n}+1$ به‌ازای $n>s$ مرکب است (بر $2^{2s}+1$ قابل قسمت است) ،

در حالت خاصی که k توانی از ۲ با نمای فرد باشد ، عدد $k.2^{2n}+1 (n=1,2,\dots)$ بر۳ قابل قسمت است .

۱۳۱ . وقتی $k=1$ باشد $n=5$ است،زیراعدد $2^{2^n}+1$ به‌ازای $n=1,2,3,4$ اول است و $2^{2^5}+1$ بر ۶۴۱ قابل‌قسمت ، یعنی $2^{2^5}+1$ عددی است مرکب .

وقتی $k=2$ باشد $n=1$ است ، زیرا 2.2^2+1 بر۳قابل‌قسمت است .

وقتی $k=3$ باشد $n=2$ ، زیرا عدد 3.2^2+1 اول و عدد $3.2^{2^2}+1=49$ بر ۷ قابل قسمت است .

وقتی $k=4$ باشد $n=2$ است ، زیرا $4.2^2+1=17$ اول‌وعدد $4.2^{2^2}+1$ بر ۵ قابل قسمت است .

وقتی $k=5$ باشد $n=1$ است ، زیرا 5.2^2+1 بر۳ قابل‌قسمت است .

وقتی $k=6$ باشد $n=1$ است،زیرا 6.2^2+1 بر ۵ قابل قسمت است .

وقتی $k=7$ باشد $n=3$ است . زیرا $7.2^2+1=29$ و $7.2^{2^2}+1=113$ اول وعدد $7.2^{2^3}+1$ بر ۱۱ قابل قسمت است .

وقتی $k=8$ باشد $n=1$ است، زیرا 8.2^2+1 بر ۳ قابل‌قسمت است.

وقتی $k=9$ باشد $n=2$ است، زیرا $9.2^2+1=37$ اول و $9.2^{2^2}+1$ بر ۵ قابل قسمت است.

وقتی $k=10$ باشد $n=2$ است، زیرا $10.2^2+1=41$ اول و $10.2^{2^2}+1$ بر ۷ قابل قسمت است.

۱۳۲ . از حل مسئلهٔ ۱۳۱ معلوم می‌شود که وقتی k مساوی یکی از عددهای ۱، ۳، ۴، ۷، ۹ یا ۱۰ باشد، شرط مسئله بر قرار نیست، عدد ۶ هم در شرط مسئله صدق نمی‌کند، زیرا $6.2^2+1=97$ اول است عددهای $2.2^{2^n}+1$ و $5.2^{2^n}+1$ و $8.2^{2^n}+1$ به‌ازای $n=1,2,\ldots$ مرکب‌اند، زیرا همهٔ آنها از ۳ بزرگتر و بر ۳ قابل قسمت‌اند.

تبصره. اگر $k=3t+2$ باشد $(t=0,1,2,\ldots)$، همهٔ عددهای $k.2^{2^n}+1$ $(n=1,2,\ldots)$ بر ۳ قابل قسمت و مرکب‌اند.

۱۳۳ . عدد $\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1)$، به‌ازای $n=1,2,\ldots$، عددی طبیعی است.

اگر n عددی زوج باشد، 2^n-1 بر ۳ قابل قسمت است و می‌توان $2^n=3k+1$ گرفت (k عددی طبیعی است)، از آنجا خواهیم داشت:

$$2^{2^n}=(2^3)^k.2=8^k.2\equiv 2 \pmod 7$$

و بنابراین:

$$2^{2^{n+1}}=(2^{2^n})^2\equiv 4 \pmod 7,$$

$$2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1\equiv 4+2+1\equiv 0 \pmod 7$$

واگر n عددی فرد باشد، $۲^n - ۲$ بر ۳ قابل قسمت و $۲^n = ۳k + ۲ (k \geqslant ۰$ عددی صحیح است) و از آنجا :

$$۲^{۲^n} = ۲^{۳k+۳} = ۸^k \cdot ۴ \equiv ۴ (\mathrm{mod}\, ۷)$$

$$۲^{۲^{n+۱}} = (۲^{۲^n})^۲ \equiv ۴^۲ \equiv ۲ (\mathrm{mod}\, ۷)$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$۲^{۲^{n+۱}} + ۲^{۲^n} + ۱ \equiv ۲ + ۴ + ۱ \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۷)$$

به‌این ترتیب عدد $\frac{۱}{۳}(۲^{۲^{n+۱}} + ۲^{۲^n} + ۱)$ ، به‌ازای عددهای طبیعی n ، بر ۷ قابل قسمت است و چون برای $n > ۱$ داریم :

$$\frac{۱}{۳}(۲^{۲^{n+۱}} + ۲^{۲^n} + ۱) \geqslant \frac{۱}{۳}(۲^{۲^۳} + ۲^{۲^۲} + ۱) = ۹۱ > ۷$$

وقتی $n = ۲, ۳, \ldots$ باشد ، این عدد مرکب است .

۱۳۴ ـ مثلاً وقتی $n = ۲۸k + ۱$ باشد $(k = ۱, ۲, \ldots)$ همهٔ عددهای دنبالهٔ مفروض مرکب خواهند بود .

در حقیقت ، بنابر قضیهٔ کوچك فرما ، $۲^{۲۸} - ۱$ بر ۲۹ قابل قسمت است و از آنجا ، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$ ، عددهای $۲^{۲۰۲۸k} - ۱$ بر ۲۹ قابل قسمت می‌شوند ؛ بنابراین ، به‌ازای $n = ۲۸k + ۱$ داریم :

$$(۲^{۲^n} + ۱)^۲ + ۲^۲ \equiv ۲۵ + ۴ \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۲۹)$$

یعنی $۲^۲ + (۲^{۲^n} + ۱)^۲$ بر ۲۹ قابل قسمت است ، ضمناً چون برای عددهای طبیعی k داریم : $n = ۲۸k + ۱ \geqslant ۲۹$ ، بنابراین

$۲۹ > ۲^۲ + (۲^{۲^n} + ۱)^۲$ می‌شود . در نتیجه همهٔ عددهای بصورت $۲^۲ + (۲^{۲^n} + ۱)^۲$ ، به‌ازای $n = ۲۸k + ۱$ $(k = ۱, ۲, \ldots)$ مرکب‌اند.

۱۳۵* . در حالتی که a عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد ، عددهای $a^{۲^n} + ۱$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ زوج و بزرگتر از ۲ و بنابراین مرکب‌اند ؛ بنابراین می‌توان فرض کرد که a عددی زوج است . $۲^{۲^۵} + ۱$ بر ۶۴۱ قابل قسمت است ، بنابراین عددهای $۴^{۲^۴} + ۱$ و $۱۶^{۲^۳} + ۱$ هم بر ۶۴۱ قابل‌قسمت می‌شوند . سپس می‌توان بسادگی ثابت کرد که هر یك از عددهای $۲^{۲^۲} + ۱$ ، $۴^۲ + ۱$ ، $۶^{۲^۳} + ۱$ ، $۸^{۲^۲} + ۱$ ، $۱۰^{۲^۳} + ۱$ ، $۱۲^{۲^۳} + ۱$ ، $۱۴^{۲^۳} + ۱$ ، $۲۰^{۲^۳} + ۱$ ، $۲۲^{۲^۳} + ۱$ ، $۲۴^{۲^۳} + ۱$ ، $۲۶^{۲^۲} + ۱$ ، $۲۸^{۱۳} + ۱$ ، $۳۰^۲ + ۱$ ، $۳۲^{۲^۲} + ۱$ بر ۱۷ قابل‌قسمت‌اند.

مثلا برای اینکه ثابت کنیم $۲۸^{۲^۳} + ۱$ بر ۱۷ قابل قسمت است ، می‌نویسیم :

$$۲۸ \equiv ۱۱ (\mathrm{mod}\, ۱۷) \Longrightarrow ۲۸^۲ \equiv ۱۲۱ \equiv ۲ (\mathrm{mod}\, ۱۷) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ۲۸^{۲^۳} \equiv ۲^{۲^۳} \equiv -۱ (\mathrm{mod}\, ۱۷)$$

و بنابراین $۲۸^{۲^۳} + ۱$ بر ۱۷ قابل قسمت می‌شود .

براساس آنچه که بدست آوردیم ، برای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ نتیجه می‌شود که هر یك ازعددهای $(۳۴k + ۲)^{۲^۲} + ۱$ ، $(۳۴k + ۴)^۲ + ۱$ ، $(۳۴k + ۶)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۸)^{۲^۲} + ۱$ ، $(۳۴k + ۱۰)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۱۲)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۱۴)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۲۰)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۲۲)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۲۴)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۲۶)^{۲^۲} + ۱$ ، $(۳۴k + ۲۸)^{۲^۳} + ۱$ ، $(۳۴k + ۳۰)^۲ + ۱$ ، $(۳۴k + ۳۲)^{۲^۲} + ۱$ بر ۱۷ قابل قسمت‌اند .

حالا ، با توجه اینکه $۱+۱۸^۲$ بر ۵ و $۱+۳۴^۲$ بر ۱۳ قابل قسمت‌اند ، نتیجه‌می‌گیریم‌که برای هرعدد طبیعی $a\leqslant ۱۰۰$ ، به‌استثنای عددهای ۵۰ ، ۵۲ ، ۶۸ ، ۸۴ و۸۶ عدد طبیعی $n\leqslant ۵$ وجوددارد،بنحوی که به‌ازای آن $۱+a^{۲^n}$ مرکب باشد .

ولی $۴۱۰۶۱ = ۲۵۰۱ = ۱+۵۰^۲$ است و دو عدد $۱+۵۲^۲$ و $۱+۶۸^۲$ بر۵ وعدد$۱+۸۴^{۲۶}$ بر۲۵۷وعدد$۱+۸۶^۲$بر۱۳قابل‌قسمت‌اند. بنابراین برای هر عدد طبیعی $a\leqslant ۱۰۰$ ، عدد طبیعی $n\leqslant ۶$ وجود دارد، بنحوی که‌عدد$۱+a^{۲^n}$ مرکب باشد .

تبصره. آشینتسل ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی a . بنحوی که $۱<a<۲^{۲^۲}$ باشد ، عدد طبیعی n وجود دارد ، طوری‌که عدد$۱+a^{۲^n}$ مرکب باشد .

معلوم نیست‌که آیا برای هر عدد طبیعی $a>۱$ ، عددطبیعی‌برای n وجود دارد . بنحوی‌که عدد $۱+a^{۲^n}$ مرکب باشدیا نه . مثلاجواب این سئوال در مورد عدد $a=۲^{۱۹۴۵}$ معلوم نیست . ولی ثابت‌شده است که برای $a=۲^{۲^{۱۹۴۴}}$ ، عدد $۱+a^۲$ مرکب است و حتی کوچکترین مقسوم‌علیه اول آنرا می‌دانیم : $۱+۵۰۲^{۱۹۴۷}$.

۱۳۶ . هر عدد اول بزرگتر از ۵ به‌صورت $۳۰k+r$ است ، که $k\geqslant ۰$ عددی صحیح و r یکی از عددهای ۱،۷،۱۱،۱۳،۱۷ ، ۱۹ ، ۲۳ یا ۲۹ است . چون تعداد عددهای اول بی‌نهایت است ، لااقل برای‌یکی از این هشت مقدار r ، بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k+r$ وجود دارد (k عددی طبیعی است) . بنابراین کافی است هشت حالت زیر را مورد مطالعه قرار دهیم .

۱) بی‌نهایت عدد اول به‌صورت $۳۰k+۱$ وجود دارد . p را یکی از آنها و $n=۷+۱۹+p$ فرض می‌کنیم ؛ n عددی فرد است ، زیرا $n=۷+۱۹+۳۰k+۱=۳(۱۰k+۹)$. عدد n مساوی مجموع سه عدد مختلف اول است (زیرا $p=۳۰k+۱$ عددی است اول و مخالف با ۷ و ۱۹) و n نمی‌تواند مساوی مجموع دو عدد اول باشد ، زیرا در اینصورت باید یکی از آنها ۲ و مساوی ۲ باشد ، یعنی داشته باشیم: $n=۳۰k+۲۷=q+۲$ ، که در آن $q=۵(۶k+۵)$ می‌شود و نمی‌تواند اول باشد .

۲) بی‌نهایت عدد اول به‌صورت $۳۰k+۷$ وجود دارد . $p>۷$ را یکی از آنها می‌گیریم و فرض می‌کنیم $n=۷+۱۳+p$ باشد ؛ n عدد فرد مرکبی است ، زیرا $n=۳۰k+۲۷=۳(۱۰k+۹)$. این عدد مساوی مجموع سه عدد مختلف اول شده‌است ، زیرا $p\geqslant ۳۷$ است و بالاخره عدد n در شرط مفروض مسئله صدق می‌کند ، زیرا $n-۲=۳۰k+۲۵=۵(۶k+۵)$ مرکب است .

۳) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k+۱۱$ وجود دارد . فرض کنید $p>۱۱$ یکی از آنها و فرض کنید $n=۱۱+۱۳+p$ باشد ؛ n عددی است فرد و مساوی مجموع سه عدد مختلف اول شده است . عدد n در شرط مسئله صدق می‌کند، زیرا $n=۳۰k+۳۵=۵(۶k+۷)$ و $n+۲=۳(۳۰k+۱۱)$ مرکب می‌شود .

۴) بی‌نهایت عدد اول به‌صورت $۳۰k+۱۳$ وجود دارد ، p را یکی از آنها می‌گیریم . در اینصورت $n=۲+۱۱+p$ عددی است فرد و مساوی مجموع سه عدد مختلف اول . عدد n در شرط مسئله صدق

می‌کند ، زیرا $n=۳(۱۰k+۹)$ و $n-۲=۵(۶k+۵)$ است .

۵) بی‌نهایت عدد اول به‌صورت $۳۰k+۱۷$ وجود دارد . p رایکی‌ازآنها و $n=۳+۷+p$ فرض‌می‌کنیم.چون $p=۳(۱۰k+۹)$ و $n-۲=۵(۶k+۵)$ است ، عدد n در شرط مسئله صدق می‌کند .

۶) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k+۱۹$ وجود دارد . p را یکی از آنها و $n=۳+۵+p$ می‌گیریم . مثل حالت قبل می‌توان نتیجه‌گرفت‌که عدد n در شرایط مسئله صدق می‌کند .

۷) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k+۲۳$ وجود دارد . p را یکی از آنها و $n=۵+۷+p$ می‌گیریم . چون $n=۵(۶k+۷)$ و $n-۲=۳(۱۰k+۲۱)$ است ، عدد n با شرایط مسئله می‌سازد .

۸) بی‌نهایت عدد اول به‌صورت $۳۰k+۲۹$ وجود دارد . p را یکی از آنها و $n=۵+۳۱+p$ می‌گیریم. چون $n=۵(۶k+۱۳)$و $n-۲=۳(۱۰k+۲۱)$ است ، عدد n در شرایط مسئله صدق می‌کند.

۱۳۷ . فرض می‌کنیم کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود داشته باشد ، بنحوی‌که $f(۱)=۲$ ، $f(۲)=۳$ و $f(۳)=۵$ باشد ، در اینصورت $g(x)=f(x)-۲$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح است ، طوریکه $g(۱)=۰$ ، یعنی $g(x)=(x-۱)h(x)$ باشد ، که در آن $h(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح است .

چون $f(۳)=۵$ است، $g(۳)=f(۳)-۲=۳$ وبنابراین $۲h(۳)=۳$ می‌شود ، ولی‌تساوی اخیرممکن نیست ، زیر $h(۳)$ عددی است صحیح .

حالا فرض کنید ، m عددطبیعی مفروضی بزرگتر ازواحد باشد. در اینصورت کثیرالجملهٔ

$$g_k(x)=\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-m)}{x-k} \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

از درجهٔ $m-1$ با ضرایب صحیح است . واضح است که برای هرعدد طبیعی $x\leqslant m$ ، بجز k ، داریم : $g_k(x)=0$ ، و $g_k(k)$ عددصحیحی مخالف صفر است . فرض می‌کنیم $f_k(x)=\frac{g_k(x)}{g_k(k)}$ ؛ $f_k(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ $m-1$ با ضرایب گویاخواهد بود وضمناً برای هر عددطبیعی $x\leqslant m$ ، بجز k ، داریم : $f_k(x)=0$ و $f_k(k)=1$.

حالا فرض می‌کنیم :

$$f(x)=p_1 f_1(x)+p_2 f_2(x)+\cdots+p_m f_m(x)$$

واضح است که $f(x)$ ، کثیرالجمله‌ای با ضرایب گویاست و ضمناً برای $k=1,2,\cdots,m$ داریم : $f(k)=p_k$ ،

۱۳۸* . اثبات **بروکین** (j.Browkin) را می‌آوریم . n را عدد طبیعی‌مفروضی‌می‌گیریم. عدد طبیعی t_k را برای عدد طبیعی $k\leqslant n$ بوسیلهٔ استقراء بطریق زیر بدست می‌آوریم .

$t_0=1$ می‌گیریم وفرض می‌کنیم که بدازای عدد طبیعی‌ومفروض $k\leqslant n$ ، عدد طبیعی t_{k-1} رامعین‌کرده باشیم. بنابر قضیهٔ دیریکله‌دربارهٔ عددهای اول در تصاعد حسابی ، عدد طبیعی t_k وجود دارد ، بنحوی که عدد $q_k=(k-1)!(n-k)!t_k+1$ اول باشد ، و درحالت $k>1$ از عددهای

$$(k-۲)!(n-k+۱)!t_{k-۱}+۱$$

بزرگتر باشند. به‌این ترتیب عددهای $q_۱, q_۲, \ldots, q_n$ اولند و ضمناً $q_۱<q_۲<\cdots<q_n$ است.

فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x)=۱+\sum_{j=۱}^{n}(-۱)^{n-j}\frac{(x-۱)(x-۲)\cdots(x-n)}{x-j}t_j,$$

$f(x)$ کثیرالجمله‌ای با درجهٔ کوچکتر یا مساوی $n-۱$ و با ضرایب صحیح است و بسادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$f(k)=۱+(k-۱)!(n-k)!t_k=q_k$$

۱۳۹. مثلاً کثیرالجملهٔ زیر دارای چنین خاصیتی است:

$$f(x)=[(x-p_۱)(x-p_۲)\cdots(x-p_m)+۱]x$$

که در آن p_k عبارتست از k امین عدد اول.

در این کثیرالجمله برای $k=۱,۲,\ldots,m$ داریم: $f(p_k)=p_k$.

۱۴۰. اگر مقدار ثابت کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح مساوی صفر باشد، $f(۰)=۰$ می‌شود و همنهشتی $f(x)\equiv۰(\mathrm{mod}p)$ برای هر مدول p دارای جواب است. بنابراین فرض می‌کنیم که مقدار ثابت $a_۰$ از کثیرالجملهٔ $f(x)$ مخالف صفر باشد. چون $f(a_۰x)=a_۰f_۱(x)$، که $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح و جملهٔ ثابت مساوی واحد است، کافی است قضیه را برای چنین کثیرالجمله‌هائی ثابت کنیم.

n را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم. واضح است که

$f_1(n!)-1$ بر $n!$ قابل قسمت است ، که در آن $k_1(n!)=n!k+1$ است (k عددی صحیح است). روشن است که قدر مطلق کثیر الجملهٔ $f_1(x)$ (که درجهٔ آن مثبت است) همراه با x بطور نامحدود صعودی است . بنابراین وقتی n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد $|f_1(n!)|=|n!k+1|>1$ و عدد $n!k+1$ دارای مقسوم‌علیه اول p است . چون $n!k+1$ بر p قابل قسمت است $p>n$ و چون $f_1(n!)$ بر p قابل قسمت است، همنهشتی $f_1(x)\equiv 0 \pmod p$ برای هر مدول اول $p>n$ جواب دارد . ولی n عدد طبیعی دلخواهی است، بنابراین همنهشتی $f_1(x)\equiv 0 \pmod p$ و در نتیجه همنهشتی $f(x)\equiv 0 \pmod p$ برای بی‌نهایت عدد اول p جواب دارد.

۱۴۱ . شرط لازم نیست ، زیرا عدد $۷=۲^۳+۱=۳^۲$ مرکب است ، در حالیکه عدد $۲۵۷=۲^{۲^۳}+۱$ اول است . شرط کافی نیست ، زیرا عدد $۲۵۷=۲^{۲^۸}+۱$ اول است ، در حالیکه $۲^{۲^{۱۶}}+۱$ مرکب است. مثال دیگر : عدد $۲^{۲^{۱۶}}+۱$ اول است ، ولی عدد $۲^{۲^{۱۶}}+۱$ مرکب است .

۵. معادلات دیوفانتی [۹]

۱۴۲ . از اتحاد

$$۳(۵۵a+۸۴b)^۲-۷(۳۶a+۵۵b)^۲=۳a^۲-۷b^۲$$

نتیجه می‌شود که اگر عددهای طبیعی $x=a$ و $y=b$ در معادلهٔ $۳x^۲-۷y^۲+۱=۰$ صدق کند، عددهای طبیعی بزرگتر $x=۵۵a+۸۴b$ و $y=۳۶a+۵۵b$ در آن صدق خواهند کرد ؛ و چون عددهای $x=۳$ ، $y=۲$ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند، بی‌نهایت جواب x و y

در معادله صدق خواهد کرد .

۱۴۳ . چون داریم : $x(2x^2+y)=7$ ، x باید مقسوم علیه صحیحی از عدد ۷ باشد ، یعنی یکی‌از عددهای ۱ ، ۱،۷ ، ۷،۱ — . با قرار دادن این‌مقادیر در معادله، برای y بترتیب‌مقادیر ۹۷،۵ — ، ۹،۱ — و ۹۹ — بدست می‌آید . بنابراین معادلهٔ مفروض برای عددهای صحیح xوy ، چهار جواب دارد :

$$(1,5);(7,-97);(-1,-9);(-7,-99)$$

حالا n را عدد طبیعی بزرگتر از ۵ در نظربگیرید و فرض‌کنید $x=\frac{7}{n}$ ، $y=n-\frac{98}{n^2}$. چون $n>5$ ، یعنی $n\geqslant 6$ است ، این عددها گویا و مثبت هستند و بسادگی می‌توان تحقیق‌کرد که در معادلهٔ $2x^3+xy-7=0$ صدق می‌کنند .

۱۴۴ . m و n را عددهای طبیعی مفروض و aوb را دو عدد مختلف اول و بزرگتر از $m+n$ و $c=am+bn$ در نظر می‌گیریم. واضح است که در اینصورت دستگاه $x=m$ ، $y=n$ در معادلهٔ $ax+by=c$ صدق می‌کند .

فرض می‌کنیم که دستگاه دیگری ازعددهای طبیعی xوy دراین معادله صدق کند . واضح است که در اینجا نمی‌شود $x\geqslant m$ ، $y>n$ یا $x>m$ ، $y\geqslant n$ باشد ، زیرا در اینصورت $ax+by>am+bn=c$ می‌شود . بنابراین باید یا $x<m$ و یا $y<n$ باشد . اگر $x<m$ باشد $m-x$ عددطبیعی کوچکتر از m می‌شود وچون $ax+by=am+bn$ است ، $by=a(m-x)+bn$ می‌شودو دراینصورت باید $a(m-x)$

بر b قابل قسمت باشد . a و b دو عدد مختلف اول بودند و بنابراین باید $m-x$ بر b قابل قسمت شود . ولی شرط اخیر هم ممکن نیست، زیرا طبق تعریف عدد b داشتیم $b>m$.

بهمین ترتیب ثابت می‌شود که فرض $y<n$ هم ممکن نیست .

تبصره. بسادگی می‌توان متوجه شد که همیشه برای هر دو دستگاه عددهای طبیعی، معادلهٔ خطی $ax+by=c$ (a ، b و c عددهای صحیح اند) وجود ندارد ، بطوریکه فقط همین دو دستگاه در آن صدق کنند . ولی بسادگی می‌توان ثابت کرد که همیشه معادلهٔ درجه دومی با ضرایب صحیح وجوددارد، که چنین خاصیتی داشته باشد .

۱۴۵ . مثلا معادلهٔ $x+y=m+1$ دارای این خاصیت است ، یعنی درست دارای m جواب طبیعی برای x و y است .

$$x=k \quad , \quad y=m-k+1 \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

تبصره. می‌دانیم که معادلهٔ خطی بصورت $ax+by=c$ وجود ندارد بنحوی که تعداد جوابهای صحیح آن برای x و y ، محدود باشد .

۱۴۶ . برای $f(x,y)=x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1$ اتحادزیر برقرار است :

$$f(x,y)=(x+y-m-1)(x+y+1)$$

چون برای عددهای طبیعی x و y ، مقدار $x+y+1$ همیشه مثبت است ، بنابراین $f(x,y)$ تنها وقتی مساوی صفر می‌شود که $x+y-m-1=0$ باشد. درنتیجه ، باتوجه به حل مسئلهٔ ۱۴۵، معادله $f(x,y)=0$ برای عددهای طبیعی x و y تنها m جواب دارد .

تبصره. کثیرالجملهٔ $f(x,y)$ ، که شامل دو متغیر است، قابل تجزیه است . این سئوال پیش می‌آید : آیا برای عدد طبیعی m ،کثیرالجملهٔ غیر قابل‌تجزیهٔ $F(x,y)$ ،شامل‌دومتغیر،وجود داردبطوریکه معادلهٔ $F(x,y)=0$ درست m جواب طبیعی‌برای عددهای x و y داشته باشد ؟ می‌توان‌ثابت‌کرد که برای هر عدد طبیعی m ، عدد طبیعی a_m وجود دارد بنحوی که معادلهٔ $x^2+y^2=a_m$ تنها m جواب برای عددهای طبیعی x و y داشته باشد. بخصوص می‌توان ثابت کرد که برای $a_{2k}=5^{2k-1}$ و $a_{2k-1}=2.5^{2k-2}$ (که درآن $k=1,2,3$ است)این‌حکم‌صحیح است، ولی اثبات‌آن‌ساده‌نیست .

متذکر می‌شویم که **آ . شینتسل** ثابت‌کردکه برای هرعدد طبیعی m ،کثیرالجمله درجه‌دوم $f(x,y)$ ، شامل دومتغیر، وجود دارد بنحوی که معادلهٔ $f(x,y)=0$ تنها m جواب برای‌عددهای صحیح xوyداشته باشد .

۱۴۷ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر عددهای x و y در معادلهٔ

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1 \qquad (1)$$

صدق‌کنند ، در معادلهٔ زیر هم صدق خواهندکرد :

$$(2y+3x-1)^2+(2y+3x+1)^2=(3y+4x)^2+1$$

بنابراین ، از هر جواب معادلهٔ (۱) برای عددهای طبیعی xوy، می‌توان جوابهای طبیعی بزرگتری برای آن بدست آورد : $2y+3x$ و $3y+4x$. ازطرف دیگرعددهای $x=2$ و $y=3$ در معادلهٔ (۱)صدق می‌کنند و بنابراین دارای بی‌نهایت جواب می‌شود .

۱۴۸ . با فرض $x=t+3$ ، معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$2t(t^2+9t+21)=0$$

که تنها یك جواب حقیقی $t=0$ را دارد . از اینجا نتیجه می‌شود که معادلهٔ مورد نظر برای عددهای حقیقی x ، تنها جواب $x=3$ را قبول می‌کند .

تبصره. می‌توان ثابت‌کردکه همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3+\cdots+[x+(n-1)r]^3=(x+nr)^3$$

برای عددهای طبیعی x ، r و n عبارتست از $n=3$ و $x=3r$ (r عدد طبیعی دلخواهی است) .

۱۴۹ . اگر $n=2k-1$ باشد (k عدد طبیعی دلخواهی است) ، بسادگی می‌توان تحقیق‌کردکه $x=-k$ ، $y=0$ جوابی از معادلهٔ مفروض است ؛ و اگر $n=2k$ باشد (k عددی‌طبیعی است)، $x=-k$ و $y=k$ جواب معادله است .

تبصره. جوابهای دیگری هم وجود دارد ، مثلا بهازای $n=8$: $x=-3$ و $y=6$ ، برای $n=25$: $x=-11$ و $y=20$ ، برای $n=1000$: $x=1333$ و $y=16830$.

۱۵۰ . در این معادله‌ضرایب x^3 ، x^2 و x بر ۳ قابل قسمت‌اند ، در حالیکه مقدار ثابت معادله مساوی ۲۵— است که بر ۳ قابل قسمت نیست . از اینجا نتیجه می‌شودکه معادلهٔ مفروض دارای جواب صحیح

برای x نیست .

۱۵۱ . با تبدیل $x=t+10$ ، معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$3t(t^2+40t+230)=0$$

چون معادلهٔ $t^2+40t+230=0$ جواب گویا ندارد ، باید $t=0$ باشد ، بنابراین معادلهٔماتنها یك جواب گویای $x=10$ را قبول دارد .

۱۵۲ . اگر برای عددهای طبیعی x وy داشته باشیم :

$$x(x+1)=4y(y+1)$$

خواهیم داشت :

$$3=[2(2y+1)]^2-(2x+1)^2=$$

$$=(4y-2x+1)(4y+2x+3)$$

و بنابراین عدد۳مضرب‌طبیعی $4y+2x+3$ است .ولی $4y+2x+3$ از ۳ بزرگتر است و نمی‌تواند مقسوم‌علیهی از آن باشد .

سپس می‌توان بسادگی تحقیق‌کردکه برای عدد طبیعی $n>1$ ، وقتی داشته باشیم :

$$x=\frac{3^n-3^{1-n}-2}{4}\ ,\ y=\frac{3^n+3^{1-n}-4}{8}$$

خواهیم داشت : $x(x+1)=4y(y+1)$

مثلا برای $n=2$ داریم : $x=\frac{5}{3}$ ، $y=\frac{2}{3}$. بنابراین معادلهٔ مفروض دارای بی‌نهایت جواب مثبت و گویا برای x وy است .

۱۵۳ . اثبات مستقیماً و به‌کمك دو اتحاد زیر بدست می‌آید :

$$۲k-۱=(۲l^۲-k)^۲+(۲l)^۲-(۲l^۲-k+۱)^۲,$$

$$۲k=(۲l^۲+۲l-k)^۲+(۲l+۱)^۲-(۲l^۲+۲l-k+۱)^۲$$

که در آنها k عددی صحیح و $l>k$ است .

۱۵۴ . این معادله تنها یك جواب طبیعی دارد : $m=۲$ ، $n=۱$

در حقیقت داریم : $۳^۲\equiv۱(\mathrm{mod}۸)$ ، بنابراین برای عددهای طبیعی k بدست می‌آید : $۳^{۲k}+۱\equiv۲(\mathrm{mod}۸)$ و $۳^{۲k-۱}+۱\equiv۴(\mathrm{mod}۸)$ ، از اینجا نتیجه می‌شودکه برای عددهای طبیعی n ، عدد $۳^n+۱$ بر ۸ و بنابراین بر ۲^m (برای $m\geqslant۳$) قابل قسمت نیست . بـه این ترتیب ، اگر به‌ازای عددهای m و n داشته باشیم $۳^m-۲^m=۱$ ، باید $m\leqslant۲$ باشد و چون $۳^n-۲=۱$ ممکن نیست‌تنها $۳^n-۲^۲=۱$ ممکن می‌شود که از آنجا $n=۱$ بدست می‌آید .

۱۵۵ . این معادله تنها دو جواب طبیعی دارد : $n=m=۱$ و $n=۲$ ، $m=۳$. درحقیقت، اگر n عددی‌فردوبزرگتر ازواحد یعنی $n=۲k+۱$ باشد(k عددی‌طبیعی‌است)، چون‌واضح‌است‌که داریم : $۳^۲\equiv۱(\mathrm{mod}۴)$ ، خواهیم داشت : $۳^{۲k+۱}\equiv۳(\mathrm{mod}۴)$ و از آنجا بدست می‌آید :

$$۲^m=۳^n-۱=۳^{۲k+۱}-۱\equiv۲(\mathrm{mod}۴)$$

بنابراین $m\leqslant۱$ ، یعنی $m=۱$ می‌شود ، و چون $۳^n-۲^m=۱$ بـود $n=۱$ می‌شود . اگر هم n عددی زوج ، یعنی بصورت $n=۲k$ باشد ،

داریم : $(۳^k-۱)(۳^k+۱)=۳^{۲k}-۱=۲^m$. به این ترتیب دو عدد زوج متوالی $۳^k-۱$ و $۳^k+۱$ توانی از ۲ می‌شوند و بنابراین باید ۲ و۴ باشند ، بنحوی‌که $k=۱$ ، $n=۲$ و بالاخره $m=۳$ بدست‌می‌آید.

۱۵۶ . فرض می‌کنیم که این دستگاه برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب داشته باشد. می‌توان x و y را نسبت بهم‌اول‌گرفت زیرا اگر $(x,y)=d>۱$ باشد ، طرفین هر دو معادله را بر $d^۲$ تقسیم می‌کنیم . بنابراین لااقل یکی از دو عدد x و y فرد هستند . ولی هر دو عدد هم نمی‌توانند فرد باشند ، زیرا در این صورت در تقسیم سمت چپ معادله بر ۴ باقیماندهٔ ۳ بدست می‌آیدکه ممکن‌نیست ، زیرا سمت راست معادله هم یك مجذور کامل است . از طرف دیگر اگر x عددی زوج‌باشد ، y نمی‌تواند عددی‌فردبشود، زیرادراینصورت‌باقیماندهٔ تقسیم سمت چپ معادلهٔ $z^۲=۲y^۲+x^۲$ بر۴ مساوی۲می‌شود که ممکن‌نیست، زیرا $z^۲$ مجذور کامل است . به این ترتیب در هر حالت به تناقض برخورد می‌کنیم .

۱۵۷ . بسادگی می‌توان‌تحقیق‌کردکه معادلهٔ مفروض‌هم ارزمعادلهٔ $(۲x+۱)^۲-۲y^۲=-۱$ می‌باشد ، که جواب $x=۳$ ، $y=۵$ درآن صدق می‌کند . بنابراین از اتحاد نتیجه می‌شود که اگر عددهای طبیعی x و y در معادلهٔ مفروض صدق کنند ، عددهای بزرگتر $x_۱=۳x+۲y+۱$ و $y_۱=۴x+۳y+۲$ هم در آن صدق خواهند کرد . در نتیجه معادلهٔ مفروض بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد . مثلا به‌ازای $x=۳$ ، $y=۵$ ، جواب $x_۱=۲۰$ ،

$y_1=۲۹$ بدست می‌آید .

۱۵۸ . بسادگی تحقیق می‌شود که معادلهٔ مفروض هم‌ارز معادلهٔ $(۲y)^۲-۳(۲x+۱)^۲=۱$ است و یکی از جوابهای آن $x=۷$ ، $y=۱۳$ است . بنابراین از اتحاد نتیجه می‌شودکه اگر عددهای طبیعی x و y در معادلهٔ ما صدق‌کنند،عددهای بزرگتر $x_1=۴y+۷x+۳$ ، $y_1=۷y+۱۲x+۶$ هم‌درآن صدق‌خواهند کرد. به این‌ترتیب معادلهٔ $y^۲=(x+۱)^۳-x^۳$ برای عددهای طبیعی x و y دارای بی‌نهایت جواب‌است . مثلابه‌ازای $x=۷$ ، $y=۱۳$ بدست‌می‌آید : $x_1=۱۵۴$، $y_1=۱۸۱$.

۱۵۹ . برای اثبات از فکر یا . **بروکین** استفاده می‌کنیم . اگر دستگاه مفروض برای‌عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب داشته باشد، مسلماً جوابی هم خواهد داشت که در آن $(x,y)=۱$ باشد . اگر دو معادلهٔ دستگاه را باهم‌جمع‌کنیم،بدست‌می‌آید : $۶(x^۲+y^۲)=z^۲+t^۲$ از آنجا نتیجه می‌شودکه باید $z^۲+t^۲$ بر ۳ قابل قسمت باشد . چون باقیماندهٔ مربع هر عدد صحیح بر ۳ (بشرطی که خود عدد بر ۳ قابل قسمت نباشد) برابر واحد است ، بنابراین برای قابل قسمت بودن $z^۲+t^۲$ بر ۳ باید z و t هر دو بر ۳ قابل قسمت باشند و در نتیجه سمت‌راست‌تساوی $۶(x^۲+y^۲)=z^۲+t^۲$ بر۹قابل قسمت‌می‌شود.ولی‌در اینصورت $x^۲+y^۲$ و در نتیجه هر دو عدد x و y بر ۳ قابل قسمت می‌شوندکه با فرض $(x,y)=۱$ متناقض است .

۱۶۰ . از معادلات مفروض نتیجه می‌شود که $z^۲+t^۲$ بر ۷ قابل

قسمت است ، از آنجا (مسئلهٔ ۳ را ببینید) هردو عدد z و t بر ۷ قابل قسمت می‌شوند ؛ بنابراین (x^2+y^2) ۷ بر۴۹ ، یعنی x و y بر ۷قابل قسمت‌اند . در نتیجه دستگاه نمی‌تواند جوابی داشته باشد ، که در آن $(x,y)=1$ باشد . ولی در اینصورت نمی‌تواند برای عددهای طبیعی x ، y ، z ، t جواب داشته باشد ، زیرا اگر $(x,y)=d>1$ باشد ، z و t بر d قابل قسمت می‌شوندبنحوی که اگر عددهای x، y ، z و t را بر d تقسیم‌کنیم ، جواب x_1،y_1 ، z_1، t_1 بدست می‌آید که در مورد آنها $(x_1,y_1)=1$ است که ممکن نیست .

۱۶۱ . مثلا یکی از جوابهای این دستگاه برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t عبارتست از ؛ $x=3$ ، $y=1$ ، $z=4$ ، $t=8$.

۱۶۲ . اگر y عددی زوج باشد ، در اینصورت باید x^2 بصورت $8k+7$ درآیدکه ممکن نیست. اگر y عددی فردوبصورت $y=2k+1$ باشد ، چون داشتیم :

$$x^2+1=y^2+2^2=(y+2)[(y-1)^2+3]$$

باید x^2+1 بر $3+(2k)^2$ قابل قسمت باشد ؛ ولی عدد $3+(2k)^2$ مقسوم‌علیه اولی بصورت $4k+3$ دارد ، بنابراین x^2+1 هم‌بایدهمین مقسوم‌علیه را داشته باشد که ممکن نیست ، زیرا $(x,1)=1$ است .

۱۶۳ . داریم :

$$x^2+1=(2c)^2+y^2=(y+2c)(y^2-2cy+4c^2)=$$

$$=(y+2c)[(y-c)^2+3c^2].$$

چون $c^۲\equiv۱(\mathrm{mod}۸)$ ، $۳c^۲\equiv۳(\mathrm{mod}۸)$ می‌شود . اگر y فرد باشد، $y-c$ عددی زوج و $(y-c)^۲+۳c^۲$ عددی بصورت $۴k+۳$ می‌شود و بنابراین مقسوم‌علیه‌اولی بهمین‌صورت خواهدداشت‌که باید مقسوم‌علیه $x^۲+۱$ باشد و ممکن نیست . اگر y زوج باشد ، داریم :

$$x^۲=(۲c)^۳+y^۳-۱\equiv-۱(\mathrm{mod}۸)$$

که باز هم ممکن نیست . از اینجا نتیجه می‌شود که معادلهٔ مفروض برای عددهای صحیح x و y جواب ندارد .

۱۶۴ . ابتدا $x=۱$ می‌گیریم.دراینصورت‌معادله‌های $y+۱=zt$ و $z+t=y$ را خواهیم داشت ،که از آنجا معادلهٔ $zt=z+t+۱$ بدست می‌آید . از اینجا $z\neq۱$ می‌شود (زیـرا بـه‌ازای $z=۱$ بدست می‌آید : $t=t+۲$ که غیر ممکن‌است) . اگر $z=۲$ باشد ، $t=۳$ و با توجه به معادلهٔ $y=z+t$ ، $y=۵$ می‌شود . بنابراین یك جواب دستگاه : $x=۱$ ، $y=۵$ ، $z=۲$ و $t=۳$ است . اگر $z\geqslant۳$ باشد ، $t\geqslant z\geqslant۳$ می‌شود و داریم : $z=z_۱+۲ ، t=t_۱+۲$ $(z_۱\geqslant۱ ، t_۱\geqslant۱)$ و از آنجا

$$zt=(z_۱+۲)(t_۱+۲)=$$

$$=z_۱t_۱+۲z_۱+۲t_۱+۴\geqslant z_۱+t_۱+۰۷=z+t+۳$$

که متناقض رابطهٔ $zt=z+t+۱$ می‌باشد .

حالا $x=۲$ می‌گیریم : $z\geqslant x=۲$ می‌شود . اگـر $z=۲$ بـاشد $۲t=y+۲$ و $۲y=t+۲$ و از آنجا $y=t=۲$ می‌شود . بنابراین

در اینحالت $x=y=z=t=۲$ می‌شودکه جواب دیگری از دستگاه است. اگر $z>۲$ باشد، چون $t\geqslant z$ است $t>۲$ می‌شود ومی‌توان فرض کرد $z=z_۱+۲$ و $t=t_۱+۲$ $(t_۱\geqslant ۱ و z_۱\geqslant ۱)$، ازآنجا بدست می‌آید:

$$zt=(z_۱+۲)(t_۱+۲)=$$

$$=z_۱t_۱+۲z_۱+۲t_۱+۴\geqslant z_۱+t_۱+۷=z+t+۳$$

ولی چون $x=۲$ است ، داریم : $zt=y+۲$ و $z+t=۲y$ ، ازآنجا $zt=۲+\frac{z+t}{۲}$. به‌این ترتیب باید داشته باشیم :

$$\frac{z+t}{۲}+۲=zt\geqslant z+t+۳ \quad\Longrightarrow\quad z+t+۲\leqslant ۰$$

که ممکن نیست .

حالا $x>۲$ ، یعنی $x\geqslant ۳$ می‌گیریم . در اینصورت $z\geqslant x\geqslant ۳$ و $t\geqslant z\geqslant ۳$ می‌شود . بنابراین می‌توان فرض کرد : $z=z_۱+۲$ ، $t=t_۱+۲$ $(t_۱\geqslant ۱ ، z_۱\geqslant ۱)$. از آنجا خواهیم داشت :

$$zt=(z_۱+۲)(t_۱+۲)=$$

$$=z_۱t_۱+۲z_۱+۲t_۱+۴\geqslant z_۱+t_۱+۷=z+t+۳$$

بهمین ترتیب از شرایط $x\geqslant ۳$ و $y\geqslant x\geqslant ۳$ بدست می‌آید : $xy\geqslant x+y+۳$ ، ولی $z+t=xy$ بود ، بنابراین بدست می‌آید :

$$zt\geqslant z+t+۳=xy+۳\geqslant x+y+۶=zt+۶$$

که ممکن نیست . به این ترتیب‌دستگاه‌دومعادلهٔ‌مفروض ، برای‌عددهای طبیعی $x، y، z، t$ و با شرط $x\leqslant z\leqslant t$ تنها دو جواب دارد :

$$x=۱,y=۵,t=۲,t=۳\ ;\ x=y=z=t=۲$$

تبصره. دستگاه مفروض برای عددهای x ، y ، z ، t بی‌نهایت جواب دارد . **مونکوسکی** جواب زیر را برای دستگاه متذکر می‌شود :

$$x=t=-۱,z=۱-y,y=\text{عددی دلخواه}$$

۱۶۵ . به‌ازای $n=۱$ ، عدد $x_۱$ می‌تواند دلخواه باشد . به‌ازای $n=۲$ داریم : $x_۱=x_۲=۲$. به‌ازای $n>۲$ جواب عبارتست از $x_۱=x_۲=\dots=x_{n-۲}=۱$ ، $x_{n-۱}=۲$ ، $x_n=n$. البته جوابهای دیگری هم برای دستگاه وجود دارد ، مثلا به‌ازای $n=۵$ جواب $x_۱=x_۲=x_۳=۱$ ، $x_۴=x_۵=۳$. به این ترتیب برای هرعدد طبیعی n ، می‌توان n عدد طبیعی پیدا کرد که مجموع آنها با حاصلضربشان برابر باشد .

۱۶۶ . اگر $n=۱$ باشد، جوابهای طبیعی معادلهٔ $x-y=a$ عبارتند $x=a+y$ و y عدد طبیعی دلخواه. اگر n عددی فرد و بزرگتر ازواحد باشد ، داریم :

$$a=x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\dots+y^{n-۱})$$

و چون $a>۰$ و $x-y\geqslant ۱$ است ، پس $x^{n-۱}+y^{n-۱}<a$ وبنابراین $x<\sqrt[n+۱]{a}$ و $y<\sqrt[n+۱]{a}$ می‌شود و بنابراین کافی است تعدادمحدودی‌عدد را موردآزمایش قرار دهیم .

اگر $n=۲k$ باشد (k عددی طبیعی است) ، خواهیم داشت :

$$a=x^n-y^n=x^{۲k}-y^{۲k}=(x^k-y^k)(x^k+y^k)$$

ازآنجا، با توجه به‌$a>۰$ ، $x^k-y^k\geqslant ۱$ وبنابراین $x^k+y^k\leqslant a$ می‌شود

یعنی $x<\sqrt[k]{a}$ و $y<\sqrt[k]{a}$ ، یعنی در اینحالت‌هم باید تعداد محدودی عدد را مورد امتحان قرار داد .

۱۶۷* . اثبات **آ.شینتسل** . p را عددی اول و n را عددی طبیعی می‌گیریم و فرض می‌کنیم که عددهای طبیعی x و y در معادلهٔ $x(x+1)=p^{2n}.y(y+1)$ صدق کنند . چون دو عدد x و $x+1$ نسبت بهم اولند یا x و یا $x+1$ بر p^{2n} قابل قسمت می‌شود ، بنحوی که در هر حال $x+1\geqslant p^{2n}$ است . ازطرف دیگر معادلهٔ مفروض هم‌ارز معادلهٔ زیر است :

$$p^{2n}-1=[p^n(2y+1)+(2x+1)]\,[p^n(2y+1)-(2x+1)]$$

از آنجاکه سمت‌چپ این تساوی و اولین عامل سمت راست آن، عددهائی طبیعی هستند، باید عامل دوم سمت راست تساوی هم عددی طبیعی باشد . از اینجا نتیجه می‌شود که $p^{2n}-1>2x+1$ ، یعنی $p^{2n}>2(x+1)$ است . حالا با در نظر گرفتن نامساوی $x+1\geqslant p^{2n}$ (که در بالا بدست آمد) ، نتیجه می‌شود : $p^{2n}>2p^{2n}$ که ممکن نیست .

۱۶۸ . $x=1$ ، $y=2$ (زیرا $1.2.3=2.3$) و $x=5$ ، $y=14$ (زیرا $5.6.7=14.15$) .

تبصره . ل . موردل ثابت کرد که این معادله جواب طبیعی دیگری ندارد [۱۰] .

۱۶۹ . با توجه به اتحاد

$$(x-2y)^2-2(x-y)^2=-(x^2-2y^2)$$

می‌توان فرض کرد : $t=x-2y$ ، $u=x-y$.

۱۷۰ . a) اثبات مستقیماً ناشی از اتحاد زیر است :

$$(m^2+Dn^2)^2-D(2mn)^2=(m^2-Dn^2)^2$$

کافی است برای عدد طبیعی دلخواه n ، عدد طبیعی m را طوری انتخاب کنیم که نامساوی $m^2>Dn^2$ بر قرار باشد و فرض کنیم :

$$x=m^2+Dn^2 \ , \ y=2mn \ , \ z=m^2-Dn^2$$

b) اثبات مستقیماً از اتحاد زیر نتیجه می‌شود :

$$1+(2n)^2+(2n^2)^2=(2n^2+1)^2 \quad (n=2,3,\cdots)$$

مثلا $9^2=8^2+4^2+1$ و $19^2=18^2+6^2+1$.

تبصره. همچنین می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد صحیح k ، معادله $x^2+y^2=z^2+k$ دارای بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x ، y و z است .

کافی است x عدد دلخواهی بزرگتر از $|k|+1$ و در حالت فرد بودن k زوج و در حالت زوج بودن k فرد بگیریم و

$$y=\frac{k+x^2-1}{2} \quad \text{و} \quad z=\frac{k+x^2+1}{2}$$

۱۷۱ . معادلهٔ مفروض با معادلهٔ $(x+1)(y+1)=1+2^{25}$ هم ارز است . چون عدد فرما $F_5=2^{25}+1$ برابر حاصلضرب دو عدد اول است که کوچکترین آنها ۶۴۱ می‌باشد ، معادلهٔ ما تنها یك جواب برای عددهای طبیعی x و $y \geqslant x$ دارد که در آن $x=640$ است .

تبصره. یادآوری این مطلب جالب است که بعضی از معادلات درجه دوم

دو مجهولی تنها یك جواب برای عددهای طبیعی x و $y \geqslant x$ دارند ، ولی (به‌علت اشکال آن) در بحث تشکیل اینگونه معادلات وارد نمی‌شویم . مثلا معادلهٔ $xy+x+y+۲=۲^{۱۰۱}$ از این جمله است .

ما نمی‌دانیم که آیا معادلهٔ $xy+x+y=۲^{۱۷}$ دارای جواب طبیعی هست یا نه .

۱۷۲ . اگر y عددی زوج باشد . $x^۲=۳-۸z+۲y^۲$ در تقسیم بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۳ می‌دهد که ممکن نیست . اگر هم y عددی فرد باشد : $y=۲k+۱$ (k عددی است صحیح) ، در اینصورت عدد $x^۲=۳-۸z+۸k^۲+۸k+۲$ در تقسیم بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۵ می‌دهد که باز هم ممکن نیست ، زیرا در تقسیم مجذور یك عدد فرد بر ۸ ، باقیمانده‌ای مساوی واحد بدست می‌آید .

۱۷۳ . x را عدد طبیعی دلخواهی فرض می‌کنیم . بسادگی می‌توان صحت اتحاد زیر را تحقیق کرد :

$$x(x+۱)(x+۲)(x+۳)+۱=(x^۲+۳x+۱)^۲$$

که با توجه به معادلهٔ ما $y=x^۲+۳x+۱$ می‌شود . به‌این‌ترتیب همهٔ جوابهای معادلهٔ ما برای عددهای طبیعی x و y از رابطهٔ $y=x^۲+۳x+۱$ بدست می‌آید که در آن x عدد طبیعی دلخواهی است .

۱۷۴ . معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲+x+y+z=۱$ برای عددهای گویا جواب ندارد ، زیرا این معادله هم‌ارز معادلهٔ زیر است :

$$(۲x+۱)^۲+(۲y+۱)^۲+(۲z+۱)^۲=۷$$

یعنی باید عدد ۷ مساوی مجموع مربعات سه عدد گویا باشد .

ثابت می‌کنیم که امکان چنین وضعی وجودندارد . در حقیقت اگر عدد ۷ مساوی مجموع مربعات سه عدد گویا باشد ، پس از تبدیل این عددها بیك مخرج به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$a^2+b^2+c^2=7m^2 \qquad (1)$$

که در آن a و b و c سه عدد صحیح و m عددی طبیعی است ، به‌این ترتیب کوچکترین عدد طبیعی m وجود دارد که به‌ازای آن معادلهٔ (۱) دارای جوابهای صحیح a، b و c است .

اگر m عددی زوج باشد : $m=2n$ (n عددی طبیعی است) ، سمت راست معادلهٔ (۱) بر ۴ قابل قسمت می‌شود ، از آنجا بسادگی نتیجه می‌شود که هر سه عدد a ، b و c بایدزوج باشد ، یعنی $a=2a_1$، $b=2b_1$ ، $c=2c_1$ که ضمناً a_1 ، b_1 و c_1 عددهائی صحیح‌اند ، چون $m^2=4n^2$ است ، معادلهٔ (۱) بصورت زیر در خواهد آمد .

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4n^2$$

که در آن n عددی طبیعی و کوچکتر از m است ، در حالیکه m را کوچکترین عددطبیعی گرفته بودیم که به‌ازای آن $7m^2$ مساوی مجموع مربعات سه عدد صحیح باشد .

به‌این ترتیب m عددی است فردو باقیماندهٔ تقسیم m^2 بر ۸ مساوی واحد می‌شود ، یعنی از تقسیم سمت راست معادلهٔ (۱) بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۷ بدست می‌آید . ولی روشن است که هیچ عددی به‌اینصورت نمی‌تواند مساوی مجموع مربعات سه عدد صحیح باشد .

۱۷۵ . اگر عددهای طبیعی x ، y و z در معادلهٔ $4xy-x-y=z^2$ صدق‌کنند ، داریم :

$$(4x-1)(4y-1)=(2z)^2+1$$

و عدد طبیعی $4x-1\geqslant 3$ مقسوم‌علیه اول p به صورت $4k+3$ را خواهد داشت . بنابراین همنهشتی $(2z)^2\equiv -1 (\mathrm{mod} p)$ بر قرار و از آنجا با توجه به $p=4k+3$ بدست می‌آید :

$$(2z)^{p-1}=(2z)^{2(2k+1)}\equiv -1(\mathrm{mod} p)$$

متناقض با حکم قضیهٔ‌کوچك فرماست .

ولی اگر n عدد طبیعی دلخواه و $x=-1$ ، $y=-5n^2-2n$ و $z=-5n-1$ باشد ، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که عددهای x ، y و z در معادلهٔ $4xy-x-y=z^2$ صدق می‌کنند .

۱۷۶ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که برای عددهای طبیعی m و برای $D=m^2+1$ داریم :

$$(2m^2+1)^2-D(2m)^2=1$$

و اگر برای عددهای طبیعی x و y داشته باشیم : $x^2-Dy^2=1$ ، با توجه به اتحاد

$$(x^2+Dy^2)^2-D(2xy)^2=(x^2-Dy^2)^2$$

خواهیم‌داشت : $x_1^2-Dy_1^2=1$ ، که‌در‌آن $x_1=x^2+Dy^2$ و $y_1=2xy$ عددهائی طبیعی و بزرگتر از x و y هستند .

از اینجا نتیجه‌می‌شود که معادلهٔ $x^2-Dy^2=1$ برای عددهای طبیعی x و y ، وقتی‌که D مساوی یکی از عددهای 2 ، 5 ، 10 ، 17 ، 26 ،

۳۷ ، ۵۰ ، ۶۵ ، ۸۲ ، ... باشد ، دارای بی‌نهایت جواب است .

۱۷۷ ٭ معادلهٔ $y^2=x^3+(x+4)^2$ دو جواب واضح دارد : $x=0$ ، $y=4$ و $x=0$ ، $y=-4$. ثابت می‌کنیم (که متعلق به **آ. شینتسل** است) که این معادله جواب‌صحیحی برای xوy که در آن $x\neq 0$ باشد ، ندارد .

فرض می‌کنیم که عددهای صحیح $x\neq 0$ و y در معادلـه صدق کنند . دراینصورت داریم :

$$x^3=(y-x-4)(y+x+4) \qquad (1)$$

چون $x\neq 0$ است، باید عددهای صحیح $y-x-4$ و$y+x+4$ مخالف صفر باشد . فرض کنید :

$$d=(y-x-4\ ,\ y+x+4) \qquad (2)$$

اگر عدد d مقسوم‌علیه اول و فرد p را داشته باشد ، با توجه بـه رابطهٔ (۱) باید x بر p قابل قسمت باشد و چون d بر p قابل قسمت است ، با توجه بـه (۲) $y-x-4$ و $y+x+4$ بر p قـابل قسمت می‌شوند ، بنابراین $2y$ بر p قابل قسمت است و چون p عـددی است فرد ، y بر p و ۴ بر p قابل قسمت می‌شودکه ممکن نیست . بنابراین d نمی‌تواند مقسوم‌علیه اول فرد داشته باشد ، یعنی d توانی از ۲ با نمای صحیح بزرگتر یا مساوی صفر می‌شود .

اگر d بر ۱۶ قابل قسمت باشد ، با توجه به(۱) و(۲) ، x^3 بـر 2^8 و ازآنجا x بر 2^3 قابل قسمت می‌شودوچون ، باتوجه به‌رابطهٔ (۲) $(y+x+4)-(y-x-4)=2x+8$ بر d قابل‌قسمت است ، باید

۸ بر ۱۶ قابل قسمت باشد که ممکن نیست . بنابراین d بر ۱۶ قابل قسمت نیست .

اگر $d=۲$ باشد، $y+x+۴=۲n$ و $y-x-۴=۲m$ می‌شود بطوریکه $(m,n)=۱$ باشد . با توجه به (۱) و (۲) معلوم می‌شود که باید x بر ۲ واز آنجا y بر ۲ قابل قسمت باشد . ازطرف دیگرداریم: $۲y=۲(m+n)$ و از آنجا $y=m+n$ می‌شود ، یعنی $m+n$ بر ۲ قابل قسمت است‌که با توجه به اینکه $(m,n)=۱$ است ثابت می‌شود که عددهای m و n هر دو فرد هستند . بهاین ترتیب چون $x^۳=۴mn$ است ، $x^۳$ بر ۸ غیر قابل قسمت می‌شود که ممکن نیست (کمی قبل ثابت شدکه x بر ۲ و بنابراین $x^۳$ بر ۸ قابل قسمت‌است). بهاین‌ترتیب $d\neq۲$ است .

$d=۴$ می‌گیریم . در اینصورت $y-x-۴=۴m$ و $y+x+۴=۴n$ می‌شودکه در آن $(m,n)=۱$ است . بنابراین با توجه به (۱) داریم : $x^۳=۱۶mn$ و از آنجا معلوم می‌شودکه x باید بر ۴ ، یعنی mn بر ۴ قابل قسمت باشد ، و چون $(m,n)=۱$ است باید یکی از عددهای m و n بر ۴ قابل قسمت ودیگری فرد باشد .

ولی چون $x-y-۴$ و x بر ۴قابل قسمت‌اند، $y=۲(m+n)$ بر ۴ قابل قسمت می‌شودکه ممکن نیست . بهاین ترتیب $d\neq۴$ است .

چون d مساوی ۲ و۴ و یا قابل قسمت بر ۱۶ نیست و از طرف دیگر بایدتوانی از ۲ باشد، تنها دوحالت $d=۱$ یا $d=۸$ باقی‌می‌ماند.

اگر $d=۱$ باشد ، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عددهای $y-x-۴$ و $y+x+۴$ مکعب عددهای صحیحی هستند :

$y-x-۴=a^۳$ و $y+x+۴=b^۳$ ، ازآنجا با توجه به (۱) بدست می‌آید : $x=ab$ و $۲x+۸=b^۳-a^۳$. در اینجا $a=b$ نمی‌تواند باشد،زیرادراینصورت $x=-۴$ می‌شودوازمعادلهٔ $y^۲=x^۲+(x+۴)^۲$ نتیجه می‌شود $y^۲=-۴۳$ که ممکن نیست . چون $x=ab$ است ، داریم :

$$۲ab+۸=b^۳-a^۳=(b-a)[(b-a)^۲+۳ab]$$

و ازآنجانتیجه‌می‌شودکه‌اگر $b-a=۱$ باشد، $۲ab+۸=۱+۳ab$و $ab=۷$ می‌شود ؛ بنابراین $x=۷$ و $y^۲=۷^۳+۱۱^۲=۴۶۴$ می‌شود که ممکن نیست ، زیرا عدد ۴۶۴ مجذورکامل نیست . به این ترتیب ، اگر $ab>۰$ باشد ، $b-a>۰$ و از آنجا با توجه‌به $b-a\neq۱$ نتیجه می‌شود $b-a\geqslant۲$ و $۲ab+۸>۶ab$ ، بنحوی که $ab<۲$ یعنی $ab=۱$ بشود و ازآنجا $a=b$ بدست می‌آیدکه ممکن‌نیست ، اگرهم $ab<۰$ باشد ، یا $a>۰$ ، $b<۰$ است که از آنجا بدست می‌آید :

$$a^۳-b^۳=a^۳+(-b)^۳\geqslant a^۲+(-b)^۲\geqslant -۲ab$$

که رابطهٔ $-۲ab>-۲ab-۸=-a^۳-b^۳$ را نقض می‌کند ؛ یا $a<۰$ ، $b>۰$ است ، که دراینصورت $b^۳=a^۳+۲ab+۸$ می‌شود و $b^۳<۸$ ، یعنی $b=۱$ و $a^۲+۲a+۷=۰$ می‌شود . تساوی اخیر هم ممکن‌نیست، زیرا معادلهٔ $t^۳+۲t+۷=۰$ دارای جواب صحیح نیست. بنابراین باید $ab=۰$ ، یعنی $x=۰$ باشدکه‌برخلاف‌فرض $x\neq۰$است. به‌این ترتیب‌حالت $d=۱$ ممکن نیست. تنها حالت $d=۸$ برای‌بررسی باقی می‌ماند .

در این حالت ، بنابر (۲) داریم : $y-x-۴=۸m$ و

$y+x+۴=۸n$ که در آن $(m,n)=۱$ است؛ دراینصورت، با توجه به (۱)، داریم: $x^۳=۶۴mn$، یعنی $mn=(\frac{x}{۴})^۳$. از آنجا، چون $(m,n)=۱$ است، نتیجه می‌شود که عددهای m و n مکعب عددهای صحیحی هستند و مثلا $m=a^۳$، $n=b^۳$، از اینجا $\frac{x}{۴}=ab$ و $۲x+۸=۸(n-m)=۸(b^۳-a^۳)$ می‌شود، بنحوی که $ab+۱=b^۳-a^۳$ باشد. واضح است که در اینجا $a=b$ نمی‌تواند باشد و بنابراین $|b-a|\geqslant ۱$ است.

اگر $ab>۰$ باشد، $b>a$ و $b-a\geqslant ۱$ می‌شود و چون داریم:

$$ab+۱=b^۳-a^۳=(b-a)[(b-a)^۲+۳ab]>۳ab$$

بدست می‌آید: $۲ab<۱$ که با $ab>۰$ متناقض است. سپس، چون $۴ab=x\neq ۰$ است، تنها فرض $ab<۰$ باقی می‌ماند. بدین ترتیب از یکطرف $|b-a|\geqslant ۱$ و $|(b+a)^۲-ab|<۰$ $|b^۳-a^۳|=|b-a|\cdot$ می‌شود و از طرف دیگر. چون $ab<۰$ است، داریم: $|ab+۱|<|ab|=-ab$. بنابراین تساوی $ab+۱=b^۳-a^۳$ ممکن نیست.

بدین ترتیب ثابت شدکه معادله $y^۲=x^۳+(x+۴)^۲$ جوابهای صحیح بصورت $x\neq ۰$ و y ندارد.

۱۷۸. این معادله با معادلهٔ $x^۲z+y^۲x+z^۲y=mxyz$ هم‌ارز است، که در آن x، y، z عددهائی صحیح و مخالف صفر و دو به دو نسبت بهم اولند. از این معادله نتیجه می‌شود که $x^۲z$ بر y، $y^۲x$ بر z و $z^۲y$ بر x قابل قسمت است. چون $(x,y)=۱$ و

$(z,y)=۱$ است ، $(x^۲z,y)=۱$ می‌شود و از قابل قسمت بودن $x^۲z$ بر y نتیجه می‌شود : $y=\pm ۱$. بهمین ترتیب بدست می‌آید : $z=\pm ۱$ ، $x=\pm ۱$.

اگر x ، y و z هم علامت باشند، ازمعادلهٔ مفروض‌بدست می‌آید $m=۱+۱+۱$ ، یعنی $m=۳$. اگراز عددهای x ، y و z دو تامثبت و یکی منفی یا دو تا منفی و یکی مثبت باشد ، بر خلاف فرض برای m جوابی منفی بدست می‌آید .

بنابراین ، وقتی m عددی طبیعی باشد ، معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m$$

تنها وقتی جوابهای صحیح ، مخالف صفر و دو بـه دو نسبت بهم اول ، برای x، z و y دارد که $m=۳$ باشد ودراینصورت هم بیش ازدوجواب ندارد: $x=y=z=۱$ ، $x=y=z=-۱$. درحالت$m\neq ۳$، معادلهٔ مفروض با شرایط مورد نظر جواب ندارد .

۱۷۹ . چون $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=۱$است ، عددهـای مثبت و گویای $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$و $\frac{z}{x}$ نمی‌توانند کوچکتر از واحد باشند ؛ و اگر لااقل از این عددها بزرگتر یا مساوی واحد باشد ، خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>۱$$

یعنی مقدارسمت چپ‌این نامساوی ، به‌ازای هیچ‌مقدارطبیعی x، y و z نمی‌تواند مساوی واحد شود .

تبصره. اثبات این مطلب که معادلهٔ مفروض برای عددهای صحیح مخالف صفر جواب ندارد ، بسیار مشکل است .

۱۸۰ . لم . اگر a ، b و c عددهای حقیقی و مثبت باشند ، بشرطی که هر سه با هم مساوی نباشند داریم :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc \qquad (1)$$

اثبات . a ، b و c راعددهای مثبتی که هرسه باهم‌مساوی نیستند می‌گیریم ، دراینصورت سه عدد مثبت u ، v و w (که هر سه مساوی هم نباشند) وجود دارد بنحوی که $a=u^3$ ، $b=v^3$ و $c=w^3$ باشد.

اتحاد زیر صحیح است :

$$u^3+v^3+w^3-3uvw =$$

$$=\frac{1}{2}(u+v+w)[(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2]$$

چون سه عدد مساوی هم نیستند ، عامل دوم سمت راست اتحاد ، عددی مثبت است و بنابراین

$$u^3+v^3+w^3 > 3uvw$$

و از آنجا

$$\left(\frac{u^3+v^3+w^3}{3}\right)^3 > u^3v^3w^3 \qquad (2)$$

چون $a=u^3$ ، $b=v^3$ ، $c=w^3$ است ، از نامساوی (۲) . نامساوی (۱) بدست می‌آید و بنابراین صحت لم ثابت می‌شود .

حالا x ، y و z را سه عدد طبیعی می‌گیریم . اگر عددهای $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ با هم مساوی باشند ، چون همه مثبت‌اند وحاصلضربی

مساوی واحد دارند، باید هرکدام آنها مساوی واحد باشندکه دراینصورت داریم :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۳>۲$$

بنابراین سه عدد $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ مساوی هم نیستند و با توجه به لم داریم :

$$\left[\frac{۱}{۳}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]^{۳}>\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}=۱$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>۳$$

به ایـن ترتیب معادلهٔ $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۲$ ، برای عـددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد .

۱۸۱ ـ فرض می‌کنیم عددهای طبیعی x ، y و z در معادلهٔ مفروض صدق کنند . اگر سه عدد $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ با هم مساوی نباشند ، همانطور که در حل مسئلهٔ ۱۸۰ دیدیم ، داریم :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>۳$$

بنابراین باید $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ باشد و از معادلهٔ مفروض نتیجه می‌شود که هرکدام از این عددها بایدمساوی واحد، یعنی $x=y=z$

باشد . در این حالت خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۱+۱+۱=۳$$

به‌این ترتیب ، معادلهٔ مفروض بی‌نهایت جواب بـرای عـددهای طبیعی x ، y و z دارد. همهٔ جوابهای‌طبیعی معادله‌ازشرط $x=y=z$ بدست می‌آید که در آن z عدد طبیعی دلخواه باشد .

تبصره. ما نمی‌دانیم‌که آیا معادله

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۴$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب دارد یا نه . در معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۵$$

مثلا جواب $x=۱$ ، $y=۲$ ، $z=۴$ و در معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=۶$$

مثلا جواب (که **یا . بروکین** پیدا کرده است) $x=۲$ ، $y=۱۲$ ، $z=۹$ صدق می‌کند .

۱۸۲* . همانطور که آ . **شینتسل** یادآوری می‌کند ، اگر برای عدد طبیعی و مفروض m ، عددهای طبیعی x ، y و z در معادلهٔ

$$x^۲+y^۲+z^۲=mxyz \qquad (۱)$$

صدق‌کنند ، در معادلهٔ زیر هم صدق می‌کنند :

$$\frac{x^۲y}{y^۲z}+\frac{y^۲z}{z^۲x}+\frac{z^۲x}{x^۲y}=m \qquad (۲)$$

زیرا داریم:

$$\frac{x^2y}{y^2z}=\frac{x^3}{xyz},\frac{y^2z}{z^2x}=\frac{y^3}{xyz},\frac{z^2x}{x^2y}=\frac{z^3}{xyz}$$

بنابراین، با توجه به مسئله های ۱۷۹ و ۱۸۰، نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۱) به ازای $m=1$ و $m=2$، برای عددهای طبیعی x، y و z جواب ندارد. از حل مسئلهٔ ۱۸۱ نتیجه می‌شود که برای $m=3$، معادلهٔ (۱) جواب $x^2y=y^2z=z^2x=n$ (n عددی طبیعی است) را قبول می‌کند. ولی در اینصورت $x^2y\cdot y^2z\cdot z^2x=n^3$ یا $(xyz)^3=n^3$ و از آنجا $xyz=n$ می‌شود، و چون $x^2y=n$ بود، $\frac{z}{x}=1$، یعنی $z=x$ می‌شود. بهمین ترتیب $x=y$ هم بدست می‌آید.

به این ترتیب باید $x=y=z$ باشد. به‌ازای $m=3$، همهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) از رابطهٔ $y=z=x$ بدست می‌آید که در آن x عدد طبیعی دلخواهی است.

۱۸۳. فرض می‌کنیم که قضیهٔ T_1 صحیح باشد. اگر قضیهٔ T_2 صحیح نباشد، عددهای طبیعی u، v و w را می‌توان طوری پیدا کرد که $u^3+v^3=w^3$ باشد، در اینصورت اگر فرض کنیم: $x=u^2v$، $y=v^2w$، $z=w^2u$، برخلاف حکم قضیهٔ T_1 بدست می‌آید:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{u^2v}{v^2w}+\frac{v^2w}{w^2u}=\frac{u^2}{vw}+\frac{v^2}{wu}=$$

$$=\frac{u^3+v^3}{uvw}=\frac{w^3}{uvw}=\frac{z}{x}$$

به این ترتیب ثابت شدکه از قضیهٔ T_1، قضیهٔ T_2 نتیجه می‌شود

(این اثبات متعلق به **شینتسل** است) .

حالا فرض می‌کنیم که قضیهٔ T_1 صحیح نباشد. در اینصورت عددهای طبیعی x ، y و z را می‌توان پیدا کرد بنحوی‌که $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ ، یعنی $x^2z+y^2x=z^2y$ باشد . فرض می‌کنیم : $x^2z=a$ ، $y^2x=b$ در اینصورت $z^2y=a+b$ و $ab(a+b)=(xyz)^2$ می‌شود. $d=(a,b)$ می‌گیریم، بنحوی‌که $a=da_1$ ، $b=db_1$ باشدکه در آن $(a_1,b_1)=1$ است . داریم :

$$a+b=d(a_1+b_1)\ ,\ a_1b_1(a_1+b_1)d^3=(xyz)^2,$$

از آنجا معلوم می‌شود که $(xyz)^2$ بر d^3 یعنی xyz بر d قابل قسمت است ، بنحوی $xyz=dt$ می‌شود (t عددی طبیعی است) .

بنابراین $a_1b_1(a_1+b_1)=t^2$ می‌شود و چون عددهای a_1b_1 و a_1+b_1 نسبت بهم اولند ، نتیجه می‌گیریم که $a_1=u^2$ ، $b_1=v^2$ و $a_1+b_1=w^2$ که در آنها عددهای u ، v و w طبیعی هستند . از آنجا برخلاف حکم قضیهٔ T_2 بدست می‌آید $u^2+v^2=w^2$. به این ترتیب ثابت کردیم که از قضیهٔ T_2 ، می‌توان قضیهٔ T_1 را نتیجه گرفت.

قضیه‌های T_1 و T_2 را می‌توان از یکدیگر نتیجه گرفت و بنابراین این دو قضیه هم‌ارزند .

تبصره . قضیه T_2 را می‌توان با روشهای مقدماتی ثابت کرد (اگر چه مشکل است) و بنابراین قضیهٔ T_1 هم صحیح است .

۱۸۴ . اگر x ، y ، z و t عددهائی طبیعی باشند ، عددهای $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ ، $\frac{z}{t}$ و $\frac{t}{x}$ گویا و مثبت و به حاصلضرب واحد خواهند بود .

بنابراین همهٔ این چهار عدد نمی‌توانند کوچکتر از واحد باشند . اما اگر یکی از آنها بزرگتر از واحد باشد ، مجموع آنها بزرگتر از واحد می‌شود و تساوی

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=۱$$

غیر ممکن می‌شود . به‌این ترتیب ثابت کردیم که معادلهٔ مفروض برای عددهای صحیح و مثبت x ، y ، z و t جواب ندارد .

حالا ثابت می‌کنیم که این معادله بی‌نهایت جواب صحیح مخالف صفر دارد . کافی است تحقیق کنیم که عددهای زیر در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند :

$$x=-n^۲, y=n^۲(n^۲-۱), z=(n^۲-۱)^۲, t=-n(n^۲-۱)$$

که در آن n عددی است طبیعی ، دلخواه و بزرگتر از واحد .

۱۸۵ . لم . اگر a ، b ، c و d عددهای مثبت باشند، بشرطی که هر چهار عدد مساوی هم نباشند ، داریم :

$$\left(\frac{a+b+c+d}{۴}\right)^۴ > abcd \qquad (۱)$$

اثبات . a ، b ، c و d را عددهای مثبت ومثلا $a\neq b$ می‌گیریم دراینصورت یا $a+c\neq b+d$ و یا $a+d\neq b+c$ خواهدشد ، زیرا اگر $a+c=b+d$ و $a+d=b+c$ باشد ، $a-b=d-c=c-d$ و از آنجا $a-b=۰$ می‌شودکه برخلاف فرض $a\neq b$ است .

اگر مثلا $a+c\neq b+d$ باشد ، فرض می‌کنیم $u=a+c$ و

$v=b+d$ ؛ داریم $u\neq v$ ، بنابراین $(u-v)^2>0$ که از آن نتیجه می‌شود $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv>4uv$ ، یعنی $u^2+v^2>2uv$ از آنجا $(a+b+c+d)^2>4(a+c)(b+d)$ می‌شود و چون $(a+c)^2\geqslant 4ac$ و $(b+d)^2\geqslant 4bd$ است ، داریم :

$$(a+b+c+d)^4>4^2(a+c)^2(b+d)^2>4^4abcd$$

که از آن نامساوی (۱) بدست می‌آید . به این ترتیب صحت حکم لم ثابت شد .

حالا فرض می‌کنیم که برای عددهای طبیعی m ، معادلهٔ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m$$

دارای جوابهای طبیعی x ، y ، z و t باشد . حاصلضرب چهار جملهٔ مثبت و گویای ما برابر واحد است ؛ اگر هر چهار جمله با هم مساوی باشند ، $m=4$ می‌شود و بنابراین اگر m عددی طبیعی وکوچکتر از ۴ باشد ، هر چهار عدد مثبت $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ ، $\frac{z}{t}$ و $\frac{t}{x}$ نمی‌توانند با هم مساوی شوند و طبق لم داریم :

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right)\right]^4>\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{t}.\frac{t}{x}=1$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}>4$$

بنابراین معادلهٔ مفروض برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t ،

وقتی $m<۴$ باشد، جواب ندارد و وقتی $m=۴$ باشد، تنها جوابهائی را قبول می‌کند که به‌ازای آنها عددهای $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$، $\frac{z}{t}$ و $\frac{t}{x}$ برابر و بنابراین مساوی واحد باشند که از آنجا $x=y=z=t$ می‌شود.

به‌ازای $m=۴$ معادلهٔ ما بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t دارد که همهٔ آنها را می‌توان با شرط $y=z=t=x$ مشخص کرد (x عدد طبیعی دلخواهی است) .

۱۸۶ . در اینجا باید $x\leqslant ۴$ باشد ، زیرا در حالت $x\geqslant ۵$ ، با با توجه به نامساویهای $x\leqslant y\leqslant z\leqslant t$ بدست می‌آید :

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\leqslant\frac{۴}{۵}<۱$$

همچنین واضح است $x\geqslant ۲$ است . بنابراین باید حالتهای $x=۲,۳,۴$ را مورد مطالعه قرار داد .

ابتدا فرض می‌کنیم $x=۲$ باشد ، دراینصورت داریم :

$$\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

چون $y\leqslant z\leqslant t$ است ، $\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{۳}{y}$ و از آنجا $y\leqslant ۶$ می‌شود ، ازطرف دیگر با توجه‌به (۱) داریم : $\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{y}$ یعنی $y\geqslant ۳$. بنابراین عدد y می‌تواند مقادیر ۳ ، ۴ ، ۵ یا ۶ را قبول‌کند .

اگر $y=۳$ باشد ، $\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\leqslant\frac{۲}{z}=\frac{۱}{۶}$ و از آنجا $z\leqslant ۱۲$ می‌شود و چون از طرف دیگر $\frac{۱}{z}>\frac{۱}{۶}$ است ، عدد z می‌تواند تنها مقادیر ۷ ،

۸ ، ۹ ، ۱۰ ، ۱۱ یا ۱۲ را قبول‌کند .

به‌ازای $z=۷$ داریم: $\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۴۲}$ و از آنجا $t=۴۲$ و جواب معادلهٔ مفروض : $x=۲$ ، $y=۳$ ، $z=۷$ ، $t=۴۲$ می‌شود .

بهمین ترتیب برای حالتهای دیگر z بدست می‌آید :

به‌ازای $z=۸$: $x=۲$ ، $y=۳$ ، $z=۸$ ، $t=۲۴$.

بدازای $z=۹$: $x=۲$ ، $y=۳$ ، $z=۹$ ، $t=۱۸$.

به‌ازای $z=۱۰$: $x=۲$ ، $y=۳$ ، $z=۱۰$ ، $t=۱۵$.

به‌ازای $z=۱۱$ بدست می‌آید $\frac{۱}{t}=\frac{۵}{۶۶}$ ، یعنی برای t عددی طبیعی بدست نمی‌آید .

به‌ازای $z=۱۲$: $x=۲$ ، $y=۳$ ، $z=۱۲$ ، $t=۱۲$.

اگر $y=۴$ باشد ، $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{z}\leqslant\frac{۲}{z}=\frac{۱}{۴}$ وازآنجا $z\leqslant۸$ می‌شود و چون $\frac{۱}{z}<\frac{۱}{۴}$ است ، $z>۴$ می‌شود و z تنها می‌تواند عددهای ۵ ، ۶ ، ۷ یا ۸ را قبول کند .

به‌ازای $z=۵$ بدست‌می‌آید : $x=۲$ ، $y=۴$ ، $z=۵$ ، $t=۲۰$

به‌ازای $z=۶$: $x=۲$ ، $y=۴$ ، $z=۶$ ، $t=۱۲$

به‌ازای $z=۷$ بدست‌می‌آید : $\frac{۱}{t}=\frac{۳}{۲۸}$ ، یعنی t عددی طبیعی نیست .

به‌ازای $z=۸$: $x=۲$ ، $y=۴$ ، $z=۸$ ، $t=۸$.

اگر $y=۵$ باشد ، $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{z}\leqslant\frac{۲}{z}=\frac{۳}{۱۰}$ و از آنجا $z\leqslant\frac{۲۰}{۳}$ ،

یعنی $z \leqslant ۶$ می‌شود و چون $z \geqslant y = ۵$ است ، z تنها می‌تواند مساوی یکی از دو عدد ۵ یا ۶ باشد .

به ازای $z = ۵$ بدست می‌آید : $x = ۲$ ، $y = ۵$ ، $z = ۵$ ، $t = ۱۰$.

به‌ازای $z = ۶$ بدست می‌آید : $\frac{۱}{t} = \frac{۲}{۱۵}$ ، یعنی t عددی طبیعی نیست .

اگر $y = ۶$ باشد ، $\frac{۲}{z} \leqslant \frac{۱}{t} + \frac{۱}{z} = \frac{۱}{۳}$ ، یعنی $z \leqslant ۶$ می‌شود وچون $z \geqslant y = ۶$ است ، بدست می‌آید $z = ۶$ و از آنجا $t = ۶$ می‌شود و یك جواب معادله بدست می‌آید : $x = ۲$ ، $y = ۶$ ، $z = ۶$ ، $t = ۶$.

به‌این ترتیب حالت $x = ۲$ را بررسی‌کردیم و ثابت‌کردیم که در اینحالت معادلهٔ (۱) دارای ۱۰ جواب برای عددهای طبیعی y ، z و t (با شرط $y \leqslant z \leqslant t$) است :

۳,۷,۴۲ ; ۳,۸,۲۴ ; ۳,۹,۱۸ ; ۳,۱۰,۱۵ ;

۳,۱۲,۱۲ ; ۴,۵,۲۰ ; ۴,۶,۱۲ ; ۴,۸,۸ ;

۵,۵,۱۰ ; ۶,۶,۶

حالا فرض می‌کنیم $x = ۳$ باشد ، دراینصورت بدست می‌آید :

$$\frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} + \frac{۱}{t} = \frac{۲}{۳}$$

از آنجا وبا توجه به شرط $y \leqslant z \leqslant t$ بدست می‌آید : $\frac{۳}{y} \geqslant \frac{۲}{۳}$ ، یعنی $y \leqslant \frac{۹}{۲}$ و بنابراین $y \leqslant ۴$.

چون $x \leqslant y = ۳$ است ، y می‌تواند یکی از دو عدد ۳ یا ۴ باشد .

اگر $y = ۳$ باشد ، داریم : $\frac{۱}{z} + \frac{۱}{t} = \frac{۱}{۳}$ و از آنجا $\frac{۲}{z} \geqslant \frac{۱}{۳}$، یعنی $z \leqslant ۶$ و چون $\frac{۱}{z} < \frac{۱}{۳}$ است $z > ۳$ می‌شود و z می‌تواند تنها عددهای ۴ ، ۵ یا ۶ را قبول کند .

به ازای $z = ۴$ بدست می‌آید : $x = ۳ ، y = ۳ ، z = ۴ ، t = ۱۲$.

به ازای $z = ۵$ بدست می‌آید : $t = \frac{۱۵}{۲}$ که عددی طبیعی نیست.

به‌ازای $z = ۶$: $x = ۳ ، y = ۳ ، z = ۶ ؛ t = ۶$.

اگر $y = ۴$ باشد ، داریم : $\frac{۱}{z} + \frac{۱}{t} = \frac{۵}{۱۲} \leqslant \frac{۲}{z}$ ، از آنجا $z \leqslant \frac{۲۴}{۵} < ۵$ می‌شود و چون $z \geqslant y = ۴$ است ، باید $z = ۴$ باشد که از آنجا $t = ۶$ بدست می‌آید یعنی : $x = ۳ ، y = ۴ ، z = ۴ ، t = ۶$.

حالا $x = ۴$ فرض می‌کنیم ، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} + \frac{۱}{t} = \frac{۳}{۴}$$

که با توجه به شرط $y \leqslant z \leqslant t$ بدست می‌آید $\frac{۳}{y} \geqslant \frac{۳}{۴}$، یعنی $y \leqslant ۴$ وچون $y \geqslant x = ۴$ است، تنها $y = ۴$ بدست می‌آید . ازآنجا $\frac{۲}{z} \geqslant \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{z} + \frac{۱}{t}$ و یا $z \leqslant ۴$ می‌شود وچون $z \geqslant y = ۴$ است ، $z = ۴$ و از آنجا $t = ۴$ بدست می‌آید : $x = ۴ : y = ۴ ، z = ۴ ، t = ۴$.

به‌این ترتیب تمام حالتهای ممکن را بررسی کردیم و معلوم شد که به‌ازای عددهای طبیعی $(x \leqslant y \leqslant z \leqslant t) t ، z ، y ، x$ ، ۱۴ جواب برای

معادلهٔ مفروض وجود دارد :

$$x,y,z,t =$$

۲,۳,۱۰,۱۵ ; ۲,۳,۹,۱۸ : ۲,۳,۸,۲۴ ; ۲,۳,۷,۴۲ ;

۲,۴,۸,۸ ; ۲,۴,۶,۱۲ ; ۲,۴,۵,۲۰ ; ۲,۳,۱۲,۱۲ ;

۲,۳,۶,۶ ; ۳,۳,۴,۱۲ ; ۲,۶,۶,۶ ; ۲,۵,۵,۱۰ ;

۳,۴,۴,۶ ; ۴,۴,۴,۴

تبصره. از معادله‌ای که در اینجا حل کردیم ، می‌توان برای حل مسئلهٔ پوشاندن صفحه بوسیلهٔ چند ضلعی‌های منتظم استفاده‌کرد .

۱۸۷ . برای هرعدد طبیعی s ، معادلهٔ مفروض حداقل یك جواب در عددهای طبیعی دارد ، مثلا $x_1 = x_2 = \dots = x_s$.

برای اینکه ثابت‌کنیم‌که معادله برای هر عدد طبیعی s ، تعداد محدودی جواب دارد ، قضیهٔ کلی‌تری را ثابت می‌کنیم : برای هر عدد گویای w و برای هر عدد طبیعی s ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_s}=w$$

دارای تعداد محدودی جواب (که‌می‌تواند صفرهم باشد) برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \dots, x_s$ است .

اثبات این قضیه را به‌کمك‌استقراء روی عدد s می‌دهیم . واضح است‌که قضیه برای $s = 1$ صحیح است .

حالا s راعددطبیعی‌دلخواهی می‌گیریم‌وفرض می‌کنیم‌که‌قضیه برای عدد sصحیح‌باشد: عددهای‌طبیعی $x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}$ رادرنظرمی‌گیریم

که در معادلهٔ زیر صدق‌کنند :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u \qquad (1)$$

که در آن u عدد مفروض، گویا و مثبتی است .

فرض می‌کنیم $x_1<x_2<\cdots<x_s<x_{s+1}$. باتوجه به(۱)پیدا می‌کنیم $u\leqslant\frac{s+1}{x_1}$ و از آنجا $x_1\leqslant\frac{s+1}{u}$ ؛ بنابراین عدد x_1 می‌تواند تعداد محدودی مقادیر طبیعی مختلف را قبول‌کند .

یکی از این مقادیر را برای x_1 انتخاب می‌کنیم ، در اینصورت برای s عدد $x_2, x_3, \cdots, x_{s+1}$ معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u-\frac{1}{x_1} \qquad (2)$$

که با انتخاب x_1 ، طرف راست آن عددی گویا خواهد بود و بنابراین بنابه فرض‌استقراء دارای تعداد محدودی‌جواب $\geqslant 0$ برای‌عددهای‌طبیعی $x_2, x_3, \cdots, x_s, x_{s+1}$ است. ولی چون x_1 تعدادمحدودی جواب طبیعی قبول می‌کند ، صحت قضیه برای $s+1$ عدد ثابت می‌شود .

۱۸۸ ✪ . بسادگی می‌توان تحقیق‌کردکه به‌ازای $s=3$ ، عددهای طبیعی و صعودی $x_1=2$ ، $x_2=3$ ، $x_3=6$ در معادله صدق می‌کند.

اگر برای‌عددطبیعی ومفروض $s\geqslant 3$ ، عددهای‌طبیعی $x_1<x_2<\cdots<x_s$ در معادلهٔ ما صدق‌کند ، چون $s\geqslant 3$ است $x_1>1$ می‌شود و بنابراین داریم : $2<2x_1<2x_2<\cdots<2x_s$. متذکر می‌شویم که عددهای $t_1=2, t_2=2x_1, t_3=2x_2, \cdots, t_s=2x_{s-1}, t_{s+1}=2x_s$ دنباله‌ای

از عددهای طبیعی صعودی را تشکیل می‌دهند و در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند :

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_{s+1}}=1 \qquad (1)$$

بنابراین l_s جواب مختلف معادلهٔ (۱) را در عددهای طبیعی و صعودی $t_1, t_2, \ldots, t_s, t_{s+1}$ داریم . بنابراین $l_{s+1} \geqslant l_s$، از اینجانتیجه می‌شودکه برای هر عدد طبیعی $s \geqslant 3$ ، معادلهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$ لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \ldots, x_s$ دارد .

اگر $s=3$ باشد ، معادلهٔ مفروض تنها یك جواب برای عددهای طبیعی و صعودی دارد. درحقیقت باید $x_1>1$ باشد ؛ بنابراین $x_1 \geqslant 2$ می‌شود و اگر $x_1 \geqslant 3$ باشد ، $x_2 \geqslant 4$ و $x_3 \geqslant 5$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$$

که ممکن نیست . بهاین ترتیب $x_1=2$ و $x_2 \geqslant 3$ می‌شود ، ولی در حالت $x_2 \geqslant 4$ داریم $x_3 \geqslant 5$ و ازآنجا چنین خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$$

که ممکن نیست . بنابراین $x_2=3$ و از آنجا $x_3=6$ می‌شود، یعنی $l_3=1$ است . $l_4<1$ است ، زیرا معادلهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$ جوابهای ۲ ، ۳ ، ۷ ، ۴۲ و ۲ ، ۳ ، ۸ ، ۲۴ را قبول دارد (جوابهای

دیگری هم دارد) .

بنابراین می‌توان فرض کرد $s \geqslant ۴$. در اینحالت معادلهٔ

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_{s-۱}}=۱$$

لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی‌وصعودی $x_۱<x_۲<\cdots<x_{s-۱}$ داردوعددهای $t_۱=۲$ ، $t_۲=۳$ ، $t_۳=۶x_۱$ ، $t_۴=۶x_۲$ ، ... ، $t_{s+۱}=۶x_{s-۱}$ عددهای طبیعی و صعودی هستندکه در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند، ضمناً این جواب غیر از هر یك از l_s جواب معادلهٔ (۱) است‌که قبلا بدست آوردیم ، زیرا در آنجا تمام عددها زوج بود و اینجا عدد $t_۲=۳$ فرد است . بنابراین $l_{s+۱} \geqslant l_s+۱$ می‌شود ، یعنی برای $s \geqslant ۳$ داریم : $l_{s+۱}>l_s$.

۱۸۹. $t_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ را n امین عدد مثلثی می‌گیریم . بسادگی می‌توان صحت روابط زیر را تحقیق کرد :

$$\frac{۱}{t_۱}=۱ \quad , \quad \frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۲}=۱ \quad , \quad \frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۳}+\frac{۱}{t_۳}=۱$$

بنابراین‌می‌توان s راعددی طبیعی و بزرگتر از۴ فرض‌کرد. اگر $s=۲k-۱$ عددی فرد باشد (k عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۳) دراینصورت داریم :

$$\frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۳}+\cdots+\frac{۱}{t_{k-۱}}+\frac{k+۱}{t_k}=\frac{۲}{۲\cdot۳}+\frac{۲}{۳\cdot۴}+\cdots+$$

$$+\frac{۲}{(k-۱)k}+\frac{۲}{k}=۲\left[\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k}\right)\right]+\frac{۲}{k}=۱$$

که سمت چپ‌عبارتست از مجموع $s=۲k-۱=(k-۲)+(k+۱)$ عدد ،که هرکدام از آنها عکس یك عدد مثلثی است .

اگر هم $s=۲k$ عددی زوج باشد ($k\geqslant ۳$ عددی طبیعی) ، در حالت $k=۳$ داریم : $\frac{۶}{t_۳}=۱$ و در حالت $k>۳$:

$$\frac{۲}{t_۳}+\frac{۱}{t_۳}+\frac{۱}{t_۴}+\cdots+\frac{۱}{t_{k-۱}}+\frac{k+۱}{t_k}=$$

$$=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳.۴}+\frac{۲}{۴.۵}+\cdots+\frac{۲}{(k-۱)k}+\frac{۲}{k}=۱$$

که سمت چپ آن عبارتست از مجموع $s=۲k=(k-۱)+(k+۱)$ عدد ، که هرکدام از آنها عکس یك عدد مثلثی است .

۱۹۰ . با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{t_k}=۲\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)$ ، وقتی که $k=۱,۲,\ldots$ باشد ، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که برای عدد طبیعی n داریم :

$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{t_n}+\frac{۱}{t_{n+۱}}+\cdots+\frac{۱}{t_{۲n-۱}}$$

۱۹۱ . واضح است که هیچیك از عددهای طبیعی x ، y ، z و t که در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند ، نمی‌توانند مساوی واحد باشند . همچنین هیچکدام از این عددها نمی‌توانند بزرگتر از ۲ باشند ، زیرا مثلا در حالت $x=۳$ ، $y=۲$ ، $z=۲$ ، $t=۲$ داریم :

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}+\frac{۱}{z^۲}+\frac{۱}{t^۲}=\frac{۱}{۹}+\frac{۳}{۴}=\frac{۳۱}{۳۶}<۱$$

که ممکن‌نیست . بنابراین باید $x=y=z=t=۲$ باشد ؛ و این تنها جواب معادلهٔ مفروض برای‌عددهای طبیعی است .

۱۹۲ . عددهای مورد نظر s عبارتند از $s=۱$ ، $s=۴$ و همهٔ عددهای طبیعی $s\geqslant ۶$. برای $s=۱$ جواب واضح $x_۱=۱$ وجوددارد . برای $s=۲$ و $s=۳$. معادلهٔ مفروض برای‌عددهای‌طبیعی جواب‌ندارد، زیرا عددهای مجهول باید بزرگتر از واحد ، یعنی $\geqslant ۲$ باشند ، برای چنین عددهائی داریم :

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}\leqslant\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}<۱$$

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\frac{۱}{x_۳^۲}\leqslant\frac{۳}{۴}<۱$$

برای $s=۴$ جواب $x_۱=x_۲=x_۳=x_۴=۲$ درمعادله‌صدق‌می‌کند

برای $s=۵$ ، معادلهٔ مفروض برای عددهای طبیعی جواب‌ندارد ، زیرا اگر دستگاه عددهای $x_۱\leqslant x_۲\leqslant x_۳\leqslant x_۴\leqslant x_۵$ در معادله‌صدق‌کند ، باید $x_۱\geqslant ۲$ و $x_۱<۳$ باشد ، چون اگر $x_۱\geqslant ۳$ باشد داریم :

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_۵^۲}\leqslant\frac{۵}{۹}<۱$$

بداین ترتیب باید $x_۱=۲$ باشد و از آنجا

$$\frac{۱}{x_۲^۲}+\frac{۱}{x_۳^۲}+\frac{۱}{x_۴^۲}+\frac{۱}{x_۵^۲}=\frac{۳}{۴}$$

از این رابطه نتیجه می‌شودکه $x_۲<۳$ است و چون $\frac{۳}{۴}<\frac{۴}{۹}$ است، بنابراین

$x_۲=۲$ می‌شود و

$$\frac{۱}{x_۳^۲}+\frac{۱}{x_۴^۲}+\frac{۱}{x_۵^۲}=\frac{۱}{۲}$$

یعنی $x_۳<۳$ و چون $\frac{۱}{۲}>\frac{۳}{۹}$ است $x_۳=۲$ و $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{x_۵^۲}+\frac{۱}{x_۴^۲}$ می‌شود که ممکن نیست ، زیرا $x_۴\geqslant ۲$ و $x_۵\geqslant ۲$ است .

برای $s=۶$ جواب $x_۱=x_۲=x_۳=۲$ ، $x_۴=x_۵=۳$ و $x_۶=۶$ صدق می‌کند .

برای $s=۷$ جواب $x_۱=x_۲=x_۳=۲$ ، $x_۴=x_۵=x_۶=x_۷=۴$ صدق می‌کند .

برای $s=۸$ جواب $x_۱=x_۲=x_۳=۲$ ، $x_۴=x_۵=۳$ ، $x_۶=۷$ ، $x_۷=۱۴$ ، $x_۸=۲۱$ صدق می‌کند .

حالا فرض می‌کنیم که برای یك عدد طبیعی s ، معادلهٔ

$$\frac{۱}{t_۱^۲}+\frac{۱}{t_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{t_s^۲}=۱$$

جوابی برای عددهای طبیعی $t_۱$ ، $t_۲$ ، ... ، t_s داشته باشد ، چون $\frac{۱}{t_s^۲}=\frac{۴}{(۲t_s)^۲}$ ، بنابراین معادلهٔ

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_{s+۳}^۲}=۱$$

جواب $x_۱=t_۱$ ، $x_۲=t_۲$ ، ... ، $x_{s-۱}=t_{s-۱}$ ، $x_s=x_{s+۱}=x_{s+۲}=$ $x_{s+۳}=۲t_s$ را قبول دارد .

به این ترتیب اگر معادلهٔ ما برای عدد طبیعی s جواب طبیعی داشته باشد ، برای عدد $s+3$ هم جواب خواهد داشت و چون معادله برای $s=6$ ، $s=7$ ، $s=8$ دارای جواب است ، برای هر عددطبیعی $s\geqslant 6$ جواب خواهد داشت (و علاوه‌برآن ، همانطورکه ثابت‌کردیم ، برای $s=1$ و $s=4$) .

۱۹۳ . حکم برای $s=2$ صحیح است ، زیرا بسادگی می‌توان تحقیق‌کرد :

$$\frac{1}{12^2}=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2} \qquad (1)$$

حالا فرض می‌کنیم که حکم برای عددهای طبیعی

$$x_0<x_1<\cdots<x_s \qquad (2)$$

صحیح باشد ، بنحوی که داشته باشیم :

$$\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_s^2} \qquad (3)$$

فرض می‌کنیم $y_0=12x_0$ ، $y_i=20x_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ ، $y_{s+1}=15x_0$. دراینصورت با توجه به (۳) و (۱) خواهیم داشت :

$$\frac{1}{y_0^2}=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\cdots+\frac{1}{y_{s+1}^2}$$

بسادگی دیده می‌شود که همهٔ عددهای $y_0, y_1, \cdots, y_s, y_{s+1}$ مختلف‌اند . در حقیقت ، با در نظر گرفتن نامساویهای (۲) ، داریم : $y_0<y_1<\cdots<y_s<y_{s+1}$ ، علاوه بر آن‌داریم : $y_0<y_{s+1}$ و

$y_i \neq y_{s+1}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ زیرا ، اگر چنین نباشد ، داریم :

$$\frac{1}{y_0^2}=\frac{1}{12^2x_0^2}>\frac{1}{y_i^2}+\frac{1}{y_{s+1}^2}=\frac{2}{15^2x_0^2}$$

که ممکن نیست . بنابراین اثبات را به‌کمك استقراء وروی‌عدد s انجام دادیم .

تبصره . پ . اردیوش ثابت کرد که برای‌هرعددگویای w ، بنحوی که $0<w<\frac{\pi^2}{6}-1$ باشد ، عددهای طبیعی n و $x_1<x_2<\cdots<x_n$ وجود دارد، بنحوی‌که داشته باشیم [۱۱] :

$$w=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}$$

۱۹۴ . فرض می‌کنیم‌که به‌ازای عدد طبیعی $n>1$ داشته باشیم:

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}$$

بطوریکه $x_1<x_2<\cdots<x_n$ ، عددهائی طبیعی باشند .

چون $n>1$ است ، باید $x_1>1$ و $x_k\geq k+1$ باشد $(k=1,2,\cdots,n)$ ؛ بنابراین :

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}\leq\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

ازطرف‌دیگرواضح‌است $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

$(k=1,2,\cdots,n)$ ، از آنجا

$$۱<(۱-\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+\cdots+(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱})=۱-\frac{۱}{n+۱}$$

که ممکن نیست .

۱۹۵ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۶^۲}+\frac{۱}{۷^۲}+\frac{۱}{۹^۲}+\frac{۱}{۱۲^۲}+\frac{۱}{۱۴^۲}+$$

$$+\frac{۱}{۲۱^۲}+\frac{۱}{۳۶^۲}+\frac{۱}{۴۵^۲}+\frac{۱}{۶۰^۲}+$$

(برای تحقیق در صحت این تساوی در نظر داشته باشید :

$$\frac{۱}{۳۶^۲}=\frac{۱}{۶۰^۲}+\frac{۱}{۴۵^۲}\quad \text{و} \quad \frac{۱}{۶^۲}=\frac{۱}{۲۱^۲}+\frac{۱}{۱۴^۲}+\frac{۱}{۲^۲}$$

بقیهٔ جمله‌ها هم مخرج مشترك $۳۶^۲$ دارند).

ما نمی‌دانیم که آیا می‌توان عدد $\frac{۱}{۲}$ را به مجموع کمتر از ۱۲ عدد تبدیل کرد که هر کدام از آنها مجذور معکوس یك عدد طبیعی باشد یا نه [۱۲] .

۱۹۶* . m را عدد طبیعی مفروضی می‌گیریم ، به‌ازای $s=۲^m$ معادلهٔ مفروض جواب زیر را (برای عددهای طبیعی) قبول دارد :

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_s=۲$$

a را عدد مفروض طبیعی بگیرید ؛ فرض می‌کنیم عددهای طبیعی $t_۱, t_۲, \cdots, t_s$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای عدد طبیعی s ، در معادلهٔ ما صدق کنند :

$$\frac{۱}{t_۱^m}+\frac{۱}{t_۲^m}+\cdots+\frac{۱}{t_s^m}=۱$$

چون داریم: $\frac{۱}{t_s^m}=\frac{a^m}{(at_s)^m}$ ، برای $x_۱=t_۱, x_۲=t_۲, x_۳=t_۳, \ldots$

$x_s=x_{s+۱}=\cdots=x_{s+a^m-۱}=at$ ، $x_{s-۱}=t_{s-۱}$ تساوی زیر صحیح است:

$$\frac{۱}{x_۱^m}+\frac{۱}{x_۲^m}+\cdots+\frac{۱}{x_{s+a^m-۱}^m}=۱$$

به این ترتیب اگر معادلهٔ مفروض به‌ازای عدد طبیعی s جواب داشته‌باشد، به‌ازای عدد $s+a^m-۱$ و بطور کلی به‌ازای $s+(a^m-۱)k$ جواب خواهد داشت (k عدد طبیعی دلخواهی است) . ازاینجا، بافرض $a=۲^m-۱, a=۲$ (به‌ازای $s=۲^m$) معلوم می‌شود که معادلهٔ ما به‌ازای عددهای زیر دارای جواب است:

$$s=۲^m+(۲^m-۱)k+[(۲^m-۱)^m-۱]l$$

(k و l عددهای طبیعی دلخواهی هستند) .

واضح است که عددهای $۲^m-۱$ و $(۲^m-۱)^m-۱$ نسبت بهم اولند . از آنجا با توجه به این قضیه: « اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول باشند ، هر عدد طبیعی $n>ab$ را می‌توان به صورت $n=ax+by$ (x و y دو عدد طبیعی‌اند) نوشت»[۱] ، نتیجه می‌گیریم که

---

۱) W.Sierpinski,Teoria liczl,CzescII . Warszawa,1959 , (صفحهٔ ۱۰ ، نتیجهٔ اول)

هر عدد طبیعی که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد ، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$(۲^m-۱)k+[(۲^m-۱)^m-۱]l$$

(k و l عددهای طبیعی‌اند) .

از آنجا می‌شودکه هر عدد طبیعی ،که‌به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ‌باشد، عددی به‌صورت زیر است :

$$۲^m+(۲^m-۱)k+[(۲^m-۱)^m-۱]l$$

یعنی به‌ازای هر عدد طبیعی s ، معادلهٔ مفروض، برای عددهای طبیعی، دارای جواب است .

۱۹۷ . کافی است ثابت‌کنیم که معادلهٔ ما به‌ازای هر عددطبیعی s ، لااقل یك جواب برای‌عددهای طبیعی $x_۱, x_۲, \cdots, x_{s+۱}$ دارد،زیرا با ضرب هر یك از عددها در یك عدد طبیعی دلخواه ، باز هم جوابی از معادلهٔ مفروض بدست می‌آید .

برای $s=۱$ داریم : $x_۱=x_۲=۱$.

برای $s=۲$ داریم :

$$\frac{۱}{۱۵^۲}+\frac{۱}{۲۰^۲}=\frac{۱}{۱۲^۲}$$

حالا فرض می‌کنیم s عدد طبیعی دلخواهی باشد ؛ فرض می‌کنیم که معادلهٔ ما ، برای عددهای طبیعی ، دارای جواب باشد :

$$\frac{۱}{t_۱^۲}+\frac{۱}{t_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{t_s^۲}=\frac{۱}{t_{s+۱}^۲}$$

چون داریم: $\frac{۱}{(۱۲t_s)^۲}=\frac{۱}{(۱۵t_s)^۲}+\frac{۱}{(۲۰t_s)^۲}$ ، بنابراین عددهای طبیعی $x_i=۱۲t_i$ (برای $i=۱,۲,\cdots,s-۱$)، $x_s=۱۵t_s$، $x_{s+۱}=۲۰t_s$ ، $x_{s+۲}=۱۲t_{s+۱}$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند :

$$\frac{۱}{x_۱^۲}+\frac{۱}{x_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_s^۲}+\frac{۱}{x_{s+۱}^۲}=\frac{۱}{x_{s+۲}^۲}$$

و به این‌ترتیب حکم مورد نظر با استقراء روی عدد s ثابت می‌شود .

۱۹۸ . کافی است ثابت‌کنیم که معادلهٔ ما به‌ازای $s\geqslant ۳$ ، لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی $x_۱,x_۲,\cdots,x_s,x_{s+۱}$ دارد . به ازای $s=۳$ داریم :

$$\frac{۱}{۱۲^۲}+\frac{۱}{۱۵^۲}+\frac{۱}{۲۰^۲}=\frac{۱}{۱۰^۲}$$

(که از تقسیم طرفین تساوی $۶^۳=۵^۳+۴^۳+۳^۳$ بر $۶۰^۳$ بدست آمده است) به‌ازای $s=۴$ داریم :

$$\frac{۱}{(۵۰.۷۰.۱۳)^۳}+\frac{۱}{(۵۰.۱۲۰.۱۳)^۳}+\frac{۱}{(۷۰.۱۲۰.۱۳)^۳}+$$

$$+\frac{۱}{(۵۰.۷۰.۱۲۰.۱۳)^۳}=\frac{۱}{(۵۰.۷۰.۱۲)^۳}+$$

که از تقسیم طرفین تساوی زیر بر $(۱۳.۱۲.۷.۵)^۳$ بدست آمده است :

$$۱^۳+۵^۳+۷^۲+۱۲^۳=۱۳^۳$$

حالا s را عدد طبیعی مفروضی $\geqslant ۳$ در نظر می‌گیریم ؛ فرض می‌کنیم

معادلهٔ مفروض به‌ازای عدد s ، دارای جواب (برای عددهای طبیعی) باشد ، یعنی عددهای طبیعی $t_1, t_2, \dots, t_s, t_{s+1}$ وجود داشته باشد ، بنحوی‌که داشته باشیم :

$$\frac{1}{t_1^3}+\frac{1}{t_2^3}+\dots+\frac{1}{t_s^3}=\frac{1}{t_{s+1}^3}$$

فرض می‌کنیم : $x_i=10t_i\ (i=1,2,\dots,s-1)$ ، $x_s=12t_s$ ، $x_{s+1}=15t_s$ ، $x_{s+2}=20t_s$ ، $x_{s+3}=10t_{s+1}$ ، بدست می‌آید :

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\dots+\frac{1}{x_{s+2}^3}=\frac{1}{x_{s+3}^2}$$

به این ترتیب اگر معادلهٔ مفروض برای s دارای جواب باشد ، برای $s+2$ هم جواب دارد و چون به‌ازای $s=3$ و $s=4$ دارای جواب بود ، به‌ازای هر عدد طبیعی $s\geqslant 3$ دارای جواب خواهد بود .

تبصره. با روشهای مقدماتی می‌توان ثابت کرد که به‌ازای $s=2$ ، معادلهٔ مفروض برای عددهای طبیعی ، جواب ندارد (ولی‌این اثبات مشکل است) .

۱۹۹* . حل **آ . شینتسل** اتحاد زیر واضح است :

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(x+z)(y+z) \quad (1)$$

اگر x ، y و z عددهای صحیحی باشند و داشته باشیم :

$$x+y+z=3 \ , \ x^3+y^3+z^3=3$$

با توجه به‌اتحاد (۱) بدست می‌آید :

$$8=(x+y)(x+z)(y+z)=(3-x)(3-y)(3-z) \quad (2)$$

با توجه به اتحاد (۱) بدست می‌آید :

$$۸=(x+y)(x+z)(y+z)=(۳-x)(۳-y)(۳-z) \quad (۲)$$

و چون $x+y+z=۲$ است داریم :

$$۶=(۳-x)+(۳-y)+(۳-z) \qquad (۳)$$

از (۳) نتیجه‌می‌شودکه عددهای $۳-x$ ، $۳-y$ ، $۳-z$ یا هر سه و یا فقط یکی باید زوج باشد . در حالت اول ، با توجه به (۲) ، باید هر یك از آنها از لحاظ قدر مطلق مساوی ۲ باشند ، و بنابر (۳) هر سه مساوی ۲ و دراینصورت $x=y=z=۱$ باشد . در حالت دیگر بنابر (۲) یکی ازعددهای $۳-x$ ، $۳-y$ ، $۳-z$ ازلحاظ قدرمطلق مساوی ۸ و بقیه از لحاظ قدر مطلق مساوی واحدند ؛ بنابراین با توجه به (۳) ، یکی از آنها مساوی ۸ و هر یك‌از دو تای دیگر مساوی۱ — می‌شود ، یعنی $x=-۵$ ، $y=z=۴$ یا $x=y=۴$ ، $z=-۵$ یـا بالاخره $x=۴$ ، $y=-۵$ ، $z=۴$.

به‌این ترتیب دستگاه مفروض، برای عددهای صحیح ، تنهاچهار جواب دارد :

$$x,y,z=۱,۱,۱ \; ; \; -۵,۴,۴ \; ; \; ۴,-۵,۴ \; ; \; ۴,۴,-۵$$

تبصره. نمی‌دانیم که آیا معادلهٔ $x^۳+y^۳+z^۳=۳$ ، غیر از چهار جواب فوق ، جواب دیگری برای عددهای صحیح x ، y و z دارد یا نه ؟

۲۰۰. واضح است که باید $n\geqslant ۸$ باشد . اگر $n=۳k$ بـاشد (k عددی طبیعی و بزرگتر از ۵ است) ، به‌ازای $x=k-۵$ و $y=۳$ داریم : $۳x+۵y=n$. اگر $n=۳k+۱$ بـاشد (k عـددی

است طبیعی و بزرگتر از ۳) ، به ازای $x=k-۳$ و $y=۲$ می‌شود . $۳x+۵y=n$ ، بالاخره اگر $n=۳k+۲$ باشد(k عددی است‌طبیعی و بزرگتر از واحد) ، به ازای $x=k-۱$ و $y=۱$ بدست می‌آید : $۳x+۵y=n$. از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی $n>۱۵$ باشدمعادلهٔ مفروض لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی xوy دارد . به این ترتیب تنها حالتهائی که n مساوی یکی از مقادیر ۸،۹،۱۰ ، ۱۲ و ۱۵ باشد ، باقی می‌ماند . به‌ازای $n=۸$ داریم : $x=y=۱$. به‌ازای $n=۹,۱۲,۱۵$ ، معادلهٔ مفروض برای‌عددهای طبیعی xوyجواب‌ندارد زیرادراین‌حالتهایا y ۵ بر۳، یعنیy بر۳و $۵y$ بر۱۵ قابل‌قسمت‌باشدو از آنجا $n=۳x+۵y>۵y\geqslant ۱۵$ می‌شودکه‌ممکن نیست. به‌ازای$n=۱۰$ هم معادلهٔ مفروض برای عددهای طبیعی xوy جواب ندارد ، زیرا باید $۳x$ بر۵، یعنی x بر۵و $۳x$ بر۱۵قابل‌قسمت‌باشدو $n=۳x+۵y>۱۵$ می‌شود .

به‌این ترتیب معادلهٔ مفروض ، بجز مواردی که n مساوی یکی‌از عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۹ ، ۱۰ ، ۱۲ و۱۵ باشد،لااقل یك جواب برای عددهای طبیعی xوy دارد .

حالا فرض می‌کنیم m عدد طبیعی‌دلخواه و n عددطبیعی بزرگتر از m ۴۰ باشد. دراینصورت‌معادلهٔ $۳x+۵y=n$ دارای جواب $x_۰$و$y_۰$ (عددهای طبیعی) است که لااقل یکی از آنها از m ۵ بزرگتر است ، زیرا در حالت $x_۰\leqslant ۵m$ و $y_۰\leqslant ۵m$ داریم: $۳x_۰+۵y_۰\leqslant ۴۰m<n$ اگر $x_۰>۵m$ باشد ، عددهای $x=x_۰-۵k$ و $y=y_۰+۳k$ $(k=۱,۲,\cdots,m)$ عددهائی طبیعی هستند و در معادلهٔ مفروض

$(3x+5y=3x_0+5y_0=n)$صدق می‌کنند . اگر $y_0>5m$ باشد، عددهای $(k=1,2,\cdots,m)$ $y=y_0-3k$ و $x=x_0+5k$ عدد هائی طبیعی‌هستند ودر معادلهٔ $3x+5y=n$ صدق می‌کنند ، بنابراین وقتی $n>40\ m$ باشد، معادلهٔ مفروض بیش از m جواب برای عددهای‌طبیعی xوy دارد ، یعنی‌تعدادا‌ینگونه‌جوابها،همراه با n بطورنامحدود صعودی است .

a . ۲۰۱) $n=2$ ، $y=x$ ، $z=x+1$ ، کـه x عدد طبیعی دلخواهی‌است؛ زیرا، وقتی x عددی‌طبیعی باشد،داریم: $2^x+2^x=2^{x+1}$.
حالا فرض می‌کنیم به ازای عددهای طبیعی x،y،nوz داشته باشیم : $n^x+n^y=n^z$ ، می‌توانیم $x\leqslant y<z$ در نظر بگیریم: $n=1$ نمی‌تواند باشد ، بنابراین $n\geqslant 2$ است. داریم:

$$n^x=n^z-n^y=n^x(n^{z-x}-n^{y-x})$$

و از آنجا $n^{z-x}-n^{y-x}=1$ می‌شود . اگر $y>x$ باشد باید ۱ بر n قابل قسمت بشود کـه ممکن نیست . بنابراین $y=x$ است . از آنجا $n^{z-x}=2$ و $n=2$ ، $z-x=1$ می‌شود ، یعنی $n=2$ ، $y=x$ و $z=x+1$.

تبصره. معادلهٔ $n^x+n^y=n^z$ ازمعادلهٔ‌فرما $x^n+y^n=z^n$، باتبدیل نقش‌پایه‌ها و نماها به‌یکدیگر ، بدست می‌آید .

b) فرض‌می‌کنیم، عددهای‌طبیعی n،x،y،zوt در معادلهٔ مفروض صدق‌کنند :

$$n^x+n^y+n^z=n^t \qquad (1)$$

که می‌توان $x\leqslant y\leqslant z<t$ در نشرگرفت . $n=1$ نمی‌تواند باشد . اگر

$n=۲$ باشد ، ازتساوی(۱)بدست می‌آید : $۱+۲^{y-x}+۲^{z-x}=۲^{t-x}$ از آنجا معلوم می‌شود که $y>x$ نمی‌تواند باشد . پس $y=x$ است واز آنجا $۲^{t-x}=۲^{z-x}+۲$ می‌شودکه ازآن‌بسهولت $z-x=۱$ پیدا می‌شود و بنابراین $t-x=۲$. به‌این‌ترتیب اگر $n=۲$ باشدبایدداشته باشیم: $y=x+۱, z=x+۲, t=x+۲$ و بسادگی می‌توان تحقیق کردکه برای هر عدد طبیعی x داریم :

$$۲^x+۲^x+۲^{x+۱}=۲^{x+۲}$$

بالاخره فرض می‌کنیم $n\neq۲$ ، یعنی $n\geqslant۳$ باشد. بنابر(۱)داریم: $۱+n^{y-x}+n^{z-x}=n^{t-x}$ ، از اینجا نتیجه می‌گیریم که بایدباشد ، یعنی $y=x$ است باید $z-x=۰$ وچون $n>۲$ باشد و بنابراین $n^{z-x}+۲=n^{t-x}$ می‌شود که از آنجا $n^{t-x}=۳$ و $n=۳$ بدست می‌آید . بنابراین اگر $t-x=۱$ باشد باید داشته باشیم : $n\neq۲$ ، $x=y=z$ و $t=x+۱$ و بسادگی می‌توان تحقیق کردکه به‌ازای هر عدد طبیعی x داریم :

$$۳^x+۳^x+۳^x=۳^{x+۱}$$

به‌این ترتیب همهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) ، برای عددهای طبیعی n, x, y, z و t عبارتند از :

$$n=۲, y=x, z=x+۱, t=x+۲;$$

$$n=۳, y=x, z=x, t=x+۱$$

(x عدد طبیعی دلخواهی است) .

c) از حل قسمت قبل بلافاصله نتیجه می‌شود که معادلهٔ $۴^x+۴^y+۴^z=۴^t$ ، برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب ندارد. در حقیقت اگر چنین جوابی وجود داشته باشد ، باید داشته باشیم :

$$۲^{۲x}+۲^{۲y}+۲^{۲z}=۲^{۲t}$$

و در حالت $x<y<z<t$ از حل قسمت قبل نتیجه می‌شود که باید $۲z-۲x=۱$ باشدکه ممکن نیست .

متذکر می‌شویم که این معادله را می‌توان با تبدیل نقش پایه‌ها و نماها در معادلهٔ $x^۴+y^۴+z^۴=t^۴$ بدست‌آوردکه‌تا حالا هنوزمعلوم نشده است که آیا برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب دارد و یا، آنطور که **اولر** فرض‌کرده است ، بدون جواب است [۱۳] .

۶ . مسائل مختلف

۲۰۲ . اثبات نتیجه‌ای از اتحاد زیر است :

$$(۳x+۴y)^۲-۲(۲x+۳y)^۲=x^۲-۲y^۲$$

توجه می‌کنیم که وقتی x و y عددهائی طبیعی باشند ، داریم : $۲x+۳y>y$ و $۳x+۴y>x$.

۲۰۳ . اگر به‌ازای عددهای صحیح x و y ، عدد $x^۲-۲y^۲$ فرد باشد ، باید عدد x فرد بشودوبنابراین $x^۲\equiv۱(\mathbf{mod}۸)$ می‌شود ؛ در حالتی‌که y زوج باشد $۲y^۲\equiv۰(\mathbf{mod}۸)$ و درحالتی‌که y عددی‌فردباشد $۲y^۲\equiv۲(\mathbf{mod}۸)$ می‌شود. بنابراین اگر $x^۲-۲y^۲$ عددی فرد باشد، $x^۲-۲y^۲\equiv\pm۱(\mathbf{mod}۸)$ می‌شود ، یعنی به‌ازای عددهای صحیح x و y نمی‌توان عدد $x^۲-۲y^۲$ را به صورت $۸k+۳$ یا $۸k+۵$ (k عددی

است صحیح) نوشت .

۲۰۴ . بسهولت می‌توان متوجه‌شدکه به‌ازای عدد طبیعی‌ودلخواه n ، عدد $(۲n+۱)^۲-۲.۲^۲$ را می‌توان به‌صورت $۸k+۱$ نوشت(k عددی صحیح و $k \geqslant ۰$ است) . سپس داریم :

$$۱=۳^۲-۲.۲^۲;۹=۹^۲-۲.۶^۲;۱۷=۵^۲-۲.۲^۲;۲۵=۱۵^۲-۲.۱۰^۲$$

ولی عدد ۳۳ را نمی‌توان به‌صورت $x^۲-۲y^۲$ (xوy عددهای طبیعی هستند) نوشت . ثابت می‌کنیم که هر عدد به صورت $۷۲t+۳۳$ $(t=۰,۱,۲,\cdots)$ رانمی‌توان‌به‌صورت $x^۲-۲y^۲$ نوشت(xوy عددهای صحیح هستند) . فرض می‌کنیم $۷۲t+۳۳=x^۲-۲y^۲$ باشد (x،y،t عددهائی صحیح‌اند) . سمت چپ تساوی بر ۳ قابل قسمت و بر ۹ غیر قابل قسمت است . از آنجا نتیجه می‌شود که هیچیك از عددهای xوy نمی‌توانند بر ۳ قابل قسمت باشند . در حقیقت اگر x بر ۳ قابل‌قسمت باشد ، y هم بر ۳ قابل قسمت می‌شود وبرعکس اگر y بر۳ قابل قسمت باشد ، باید x هم بر ۳ قابل قسمت شود ؛ ولی دراینصورت سمت راست تساوی ما بر ۹ قابل قسمت می‌شود که ممکن نیست . بنابراین عددهای xوy بر ۳ قابل قسمت نیستند ، از آنجا از تقسیم هریك از دو عدد $x^۲$و$y^۲$ بر ۳ ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ بدست می‌آید ، یعنی از تقسیم $x^۲-y^۲$ بر ۳ باقیمانده‌ای‌مساوی ۲ پیدا می‌شود که ممکن نیست ، زیرا سمت چپ تساوی بر ۳ قابل قسمت است .

به‌این‌ترتیب بی‌نهایت‌عدد طبیعی به‌صورت $۸k+۱$ $(k=۱,۲,\cdots)$ وجود دارد که به‌صورت $x^۲-۲y^۲$ قابل تبدیل نیست (xوy عددهائی صحیح‌اند) و کوچکترین این عددها $۸.۴+۱=۳۳$ است .

۲۰۵ . عدد کامل زوج به‌عددی گویند که به‌صورت $(۱-۲^p)۲^{p-۱}$ باشد ، که در آن p و $۱-۲^p$ عددهائی اولند . به‌ازای $p=۲$ ، عدد ۶ بدست می‌آید . اگر $p>۲$ باشد، p عددی است اول که می‌توان آنرا بیکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ در نظر گرفت .

اگر $p=۴k+۱$ باشد ، $۲^{p-۱}=۲^{۴k}=۱۶^k$ می‌شود و واضح است که آخرین رقم عدد $۲^{p-۱}$ مساوی ۶ می‌شود ، رقم آخر عدد $۲.۱۶^k-۱=۲^{۴k+۱}-۱=۲^p-۱$ مساوی واحد است . به این ترتیب آخرین رقم حاصلضرب $(۱-۲^p)۲^{p-۱}$ مساوی ۶ می‌شود. در حالتی که $p=۴k+۳$ باشد داریم : $۲^{p-۱}=۲^{۴k+۲}=۴.۱۶^k$ که رقم آخر آن مساوی ۴ است . رقم آخر ۲^p هم مساوی ۸ و بنابراین رقم آخر $۲^{p-۱}$ مساوی ۷ می‌شود ، بنابراین آخرین رقم عدد $(۱-۲^p)۲^{p-۱}$ مساوی ۸ خواهد شد (زیرا ازضرب دوعددی که یکی به ۴ ودیگری به ۷ختم شده باشد : عددی بدست می‌آیدکه به ۸ ختم شده است) .

تبصره. باکمی اشکال بیشتر می‌توان این قضیهٔ را ثابت کرد که اگر آخرین رقم عدد کامل مساوی ۸ باشد ، رقم ماقبل آخر آن مساوی ۲ خواهد بود .

۲۰۶ . مقدار کسر در مبنای g چنین است :

$$\frac{۱+g^۲+g^۴+g^۶+g^۸}{۱+g+g^۴+g^۷+g^۸}$$

و باید ثابت کرد که ، برای هر عدد طبیعی k ، این مقدار برابر است با کسر زیر :

$$\frac{1+g^2+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}}{1+g+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}} \qquad (1)$$

تساوی دوکسر از اینجا بدست می‌آیدکه حاصلضرب مخرج کسر اول درصورت‌کسردوم برابر است با حاصلضرب مخرج‌کسردوم درصورت کسر اول .

تبصره . یا. بروکین متذکرمی‌شودکه برای‌هر عددطبیعی k، اتحادهای زیرصحیح است :

$$1+g^2+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}=$$
$$=(1-g+g^2-g^3+g^4)(1+g+g^2+\ldots+g^{2k+2}),$$
$$1+g+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}=$$
$$=(1-g^2+g^4)(1+g+g^2+\ldots+g^{2k+2}),$$

که براساس‌آنها، کسر (۱) ، به‌ازای $k=1,2,\ldots$، مساوی‌کسر زیر است :

$$\frac{1-g+g^2-g^3+g^4}{1-g^2+g^4}$$

و بنابراین مقدار آن بستگی به عدد طبیعی k ندارد .

۲۰۷ . آ . شینتسل قضیهٔ‌کلی‌تری را ثابت‌کرد ، یعنی‌اگر gعددی طبیعی و زوج و غیر قابل قسمت بر۱۰ باشد ، مجموع رقمهای عدد g^n (وقتی در دستگاه عددشماری به مبنای ده نوشته شود)، همراه باnبطور نامحدود صعودی است . و این اثبات اوست :

دنبالهٔ بی‌نهایتی از عددهای صحیح a_i $(i=0,1,2,\ldots)$ بترتیب زیر معین می‌کنیم : $a_0=0$ و برای $k=0,1,2,\ldots$ فرض می‌کنیم که a_{k+1} کوچکترین عدد طبیعی باشدکه در شرط $2^{a_k+1}>10^{a_k}$ (به‌این

ترتیب $a_1=1$ ، $a_2=4$ ، $a_3=14$ وغیره می‌شود) صدق کند .

دراینصورت داریم : $a_0<a_1<a_2<\cdots$

ثابت می‌کنیم که اگر برای عدد طبیعی k داشته باشیم $n\geqslant a_k$ ، مجموع رقمهای عدد g^n بزرگتر یا مساوی k خواهد بود . c_j را رقمی از تجزیهٔ اعشاری عدد g^n می‌گیریم که در 10^j ضرب شده است . چون g عددی است زوج ، g^n بر 2^n قابل قسمت است وچون $n\geqslant a_k$ است، g^n بر 2^{a_i} قابل قسمت است $(i=1,2,\cdots,k)$. بنابراین با توجه به اینکه 10^{a_i} بر 2^{a_i} قابل قسمت است ، $c_{a_i-1}\cdot 10^{a_i-1}+\cdots+c_0$ بر 2^{a_i} قابل قسمت می‌شود .

اگر برای $a_{i-1}\leqslant j<a_i$ ، همهٔ رقمهای c_j مساوی صفر باشد ، $c_{a_{i-1}-1}\cdot 10^{a_{i-1}-1}+\cdots+c_0$ بر 2^{a_i} قابل قسمت است . و چون $c_0\neq 0$ است داریم :

$$2^{a_i}\leqslant a_{a_{i-1}-1}\cdot 10^{a_{i-1}-1}+\cdots+c_0<10^{a_i-1}$$

از آنجا $2^{a_i}<10^{a_i-1}$ بدست می‌آید که برخلاف فرض است . بنابراین لااقل یکی ازرقمهای c_j ، با شرط $a_{i-1}<j<a_i$ ،مخالف صفر است .

ولی نتیجهٔ اخیر برای $i=1,2,\cdots,k$ صحیح است ، بنابراین عدد g^n لااقل k رقم مخالف صفردارد. به‌این‌ترتیب، وقتی که n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد (به‌ازای $n\geqslant a_k$) ، مجموع رقمهای عدد g^n کمتراز مقدار عدد طبیعی ودلخواه k نیست ، یعنی‌مجموع‌رقمهای عدد g^n بطور نامحدود همراه با n صعودی است .

شبیه روشی که شینتسل استفاده می‌کند ، می‌توان ثابت کرد که اگر g عدد طبیعی فرد قابل قسمت بر ۵ باشد، مجموع رقمهای عدد g^n همراه با n بطور نامحدود صعودی است .

از اثبات قضیهٔ شینسل می‌توان نتیجه گرفت که در حالت خاص ($g=۲$ بد ازای) ، مجموع رقمهای عدد ۲^n همراه با n بطور نامحدود صعودی است، ولی این صعودی بودن یکنوا (مونوتون) نیست ؛ مثلا ، مجموع رقمهای عدد $۲^۳$ مساوی ۸ است، مجموع رقمهای عدد $۲^۴$ مساوی ۷، مجموع رقمهای عدد $۲^۵$ مساوی ۵ ، مجموع رقمهای عدد $۲^۹$ مساوی ۸ ، مجموع عدد $۲^{۱۰}$ مساوی ۷، مجموع رقمهای عدد $۲^{۱۶}$ مساوی ۲۵ و مجموع رقمهای عدد $۲^{۱۷}$ مساوی ۱۴ .

۲۰۸* . اثبات آ . شینتسل .

k را عدد طبیعی بزرگتر از واحد و c را رقم دلخواهی از دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده می‌گیریم . چون $k>۱$ است بسادگی (و مثلاً به‌کمك استقراء ریاضی) می‌توان ثابت کرد که $۱۰^{k-۱}>۲.۲^k$ است .

اگر t را کوچکترین عدد صحیحی فرض کنیم که در شرط $t\geqslant c.\frac{۱۰^{k-۱}}{۲^k}$ صدق کند ، داریم :

$$t<c.\frac{۱۰^{k-۱}}{۲^k}+۱ \Rightarrow t+۱<c.\frac{۱۰^{k-۱}}{۲^k}+۲$$

از دو عدد غیرمنفی و صحیح t و $t+۱$ ، لااقل یکی بر ۵ قابل قسمت نیست، آنرا به u نشان می‌دهیم ، داریم :

$$c.\frac{۱۰^{k-۱}}{۲^k}\leqslant u<c.\frac{۱۰^{k-۱}}{۲^k}+۲$$

و چون $۱۰^{k-۱}>۲.۲^k$ ، به‌ازای $t=۲^k.u$ داریم :

$$c\cdot 10^{k-1} \leqslant t < (c+1)10^{k-1}$$

از آنجا دیده می‌شود که عدد $t = 2^k.u$ دارای k رقم است که اولین آنها (یا k امین رقم از آخر) مساوی c است (این رقم مساوی صفر هم می‌تواند باشد) .

چون $t = 2^k.u$ است ، t بر 2^k قابل قسمت می‌شود واز تعریف عدد u نتیجه می‌شود u بر ۵ قابل قسمت نیست ، بنحوی‌که $(t,5) = 1$ است .

چون $(t,5) = 1$ است ، عدد طبیعی $n \geqslant k$ وجود دارد بنحوی $2^n \equiv t \pmod{5^k}$ باشد . ولی t بر 2^k و 2^n بر 2^k قابل قسمت‌اند ، بنابراین $2^n \equiv t \pmod{2^k}$ می‌شود. به‌این ترتیب $2^n \equiv t \pmod{10^k}$، یعنی k رقم آخر عدد t همان k رقم آخر عدد 2^n است .

ازاینجا نتیجه می‌شود که‌رقم kام ازآخر درعدد 2^n برابر cاست .

تبصره. چهار رقم آخر توان ۲ نمی‌تواند $111c$ باشد ، که در آن c مساوی ۲ ، ۴ ، ۶یا۸است، زیرا هیچیك از عددهای ۱۱۱۲ ، ۱۱۱۴، ۱۱۱۶ و ۱۱۱۸ بر ۱۶ قابل قسمت‌نیستند .

شبیه استدلال‌بالا ، می‌توان ثابت‌کرد‌که‌رقمهای سوم و چهارم عدد 2^n از آخر $(n = 3,4,\ldots)$ می‌توانند دلخواه باشند . همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر m ، عدد طبیعی دلخواهی باشدو k ، تعداد رقمهای آن؛ عدد طبیعی n وجود دارد بنحوی که k رقم اول عدد 2^n همان رقمهای عدد m باشند .

آ . رونکه‌ویچ ثابت کرد که اگر a عدد مفروض طبیعی بزرگتر از واحد باشد ، بنحوی‌که $(a,10) = 1$ و 2^α و 5^β بالاترین توان عددهای ۲ و ۵ باشند که بر $a^4 - 1$ قابل قسمت‌اند و $\gamma = \mathrm{Max}(\alpha,\beta)$ باشد ، در

اینصورت برای هر دو دنبالهٔ رقمهای $a_1, a_2, \ldots, a_m$ و $b_1, b_2, \ldots, b_k$ (در دستگاه اعشاری) عدد بزرگ و دلخواه s وجود دارد، بنحوی‌که m رقم اول عدد a^s همان‌دنبالهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ باشد وبجای شماره‌های $\gamma+1, \ldots, \gamma+k-1$ از آخر دنبالهٔ $b_1, b_2, \ldots, b_k$ وجودداشته باشد.

۲۰۹ · برای عدد طبیعی $n \geqslant 4$ داریم :

$$5^{n+4} - 5^n = 5^n(5^4 - 1) = 5^n \cdot 16 \cdot 39$$

و بنابراین $5^{n+4} \equiv 5^n \pmod{10000}$ می‌شود، ازآنجا نتیجه می‌شود که چهار رقم آخر دنبالهٔ 5^n $(n = 4, 5, \ldots)$ یك دورهٔ چهار جمله‌ای تشکیل می‌دهند، یعنی دوره‌ای بصورت زیر :

$$0625, 3125, 5625, 8125$$

این دورهٔ خالص نیست، زیرا عددهای 5 و $25 = 5^2$ و $125 = 5^3$ به‌آن مربوط نیستند.

۲۱۰ · s را عدد طبیعی مفروض و $c_1, c_2, \ldots, c_s$ را دنبالهٔ s رقم دلخواه ازدستگاه‌عددشماری به‌مبنای ده می‌گیریم. $m = (c_1 c_2 \ldots c_s)_{10}$ راعددsرقمی‌فرض می‌کنیم‌که رقمهای‌آن ازدنبالهٔ $c_1, c_2, \ldots, c_s$ تشکیل شده باشد.عدد طبیعی k را طوری انتخاب می‌کنیم که $2\sqrt{m} < 10^{k-1}$ باشد و فرض می‌کنیم $n = [10^k \sqrt{m}] + 1$:که درآن $[x]$ عبارتست از بزرگترین عدد صحیحی‌که از x کوچکتر نباشد . داریم :

$$10^k \sqrt{m} < n < 10^k \sqrt{m} + 1,$$

و از آنجا: $10^{2k} \cdot m < n^2 < 10^{2k} \cdot m + 2 \cdot 10^k \sqrt{m} + 1 <$

$$< 10^{2k} m + 10^{2k-1} + 1 < 10^{2k} \cdot m + 10^{2k} - 1;$$

بنابراین :

$$۱۰^{۲k}.m<n^۲<۱۰^{۲k}.m+(۱۰^{۲k}-۱)$$

یعنی :

$$(c_۱c_۲\cdots c_s۰۰\cdots۰)_{۱۰}<n^۲<(c_۱c_۲\cdots c_s۹۹\cdots۹)_{۱۰}$$

که در آن تعداد رقمهای صفر و یا تعداد رقمهای ۹ مساوی $۲k$ است. از آنجا نتیجه می‌شود که s رقم اول عدد $n^۲$ عبارتست از دنبالهٔ $c_s,\ldots,c_۲,c_۱$.

۲۱۱ . اگر n عددی طبیعی باشد ، عدد

$$n^{n+۲۰}-n^n=n^n(n^{۲۰}-۱)$$

بر ۴ قابل قسمت است ، زیرا اگر n عددی زوج باشد ، n^n بر ۴ قابل قسمت است واگر n عددی فردباشد ، $n^{۱۰}$ هم‌عددی‌فرد می‌شودوبنابراین مجذور آن یعنی $n^{۲۰}$ درتقسیم بر ۸ باقیمانده‌ای‌مساوی واحد دارد ، از آنجا $n^{۲۰}-۱$ بر ۸ قابل قسمت می‌شود .

بنابراین به‌ازای هر عدد طبیعی n ، هم عدد $n^{n+۲۰}-n^n$ و هم $(n+۲۰)^{n+۲۰}-n^n$ بر ۴ قابل قسمت‌اند .

ولی اگر aو b دو عدد طبیعی باشند بشرطی که $a>b$ و $a-b$ قابل قسمت بر ۴ باشد ، برای هر عدد طبیعی n ، عدد n^a-n^b بر ۵ قابل قسمت است . درحقیقت $a=b+۴k$ است (k عددی‌طبیعی است) بنحوی‌که داریم : $n^a-n^b=n^b(n^{۴k}-۱)$. اگر n بر ۵ قابل قسمت باشد ، اولین عامل سمت راست تساوی بر ۵ قابل قسمت است و اگر n بر۵قابل‌قسمت‌نباشد، براساس‌قضیهٔ‌کوچك‌فرماداریم: $n^۴\equiv۱(\mathrm{mod}۵)$

از آنجا $n^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ یعنی عامل دوم سمت راست تساوی بر ۵ قابل قسمت است . به این ترتیب ثابت کردیم که اگر a و b عددهائی طبیعی، $a > b$ و $a - b$ قابل قسمت بر ۴ باشد ، برای عددهای طبیعی n ،عدد $n^a - n^b$ بر ۵ قابل قسمت است و واضح است که در اینصورت $(n+20)^a - n^b$ بر ۵ قابل قسمت است . در حالت خاص ، وقتی $a = (n+20)^{n+20}$ و $b = n^n$ باشد ، همانطور که قبلا ثابت کردیم $a - b$ بر ۴ و بنابراین $(n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n}$ بر ۵ قابل قسمت است و چون این عدد زوج است (زیرا عددهای n و $n+20$ یا هر دوزوج و یا هردرفردند) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $(n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n}$ بر ۱۰ قابل قسمت می‌شود. از اینجانتیجه می‌گیریم که دوعدد $(n+20)^{(n+20)^{n+20}}$ و n^{n^n} بیك رقم ختم می‌شوند .

بنابراین دنباله‌ای که ازرقمهای آخرعدد n^{n^n} $(n = 1,2,3,\dots)$ تشکیل می‌شود ، متناوب است وضمناً دورهٔ آن خالص و تعداد جمله‌های آن بیشتر از ۲۰ نیست . بسادگی می‌توان حساب کرد که این دوره درست شامل ۲۰ جمله است که از رقمهای زیر تشکیل شده است :

$$1,6,7,6,5,6,3,4,9,0,1,6,3,6,5,6,3,4,9,0$$

۲۱۲ . m را عدد طبیعی دلخواهی فرض کنید . کسر اعشاری نامحدود مفروض را به قطعاتی که هر کدام شامل m رقم باشند ، تقسیم می‌کنیم . تعداد این قطعات بی‌نهایت زیاد است . از طرف دیگر ، تعداد دستگاههای متفاوتی که از m رقم تشکیل شده باشند برابر 10^m است یعنی این تعداد محدود است . بنابراین لااقل یکی از این دستگاهها

باید بی‌نهایت مرتبه تکرار شده باشد .

تبصره برای عددهای گنگ $\sqrt{۲}$ ، π یا e ، ما حتی نمی‌دانیم کدام رقم در نمایش اعشاری آنها ، بی‌نهایت مرتبه تکرارمی‌شود ، اگر چه‌هریك از این عددها لااقل شامل دورقم متفاوت ازاینگونه است (و مطلب اخیر را می‌توان ثابت‌کرد) .

۲۱۳ . a) اگر داشته باشیم :

$$۳^{۲k}=(n+۱)+(n+۲)+\cdots+(n+۳^k)$$

بدست خواهد آمد :

$$۳^{۲k}=۳^k.n+\frac{۱}{۲}۳^k(۳^k+۱)$$

و از آنجا $n=\frac{۳^k-۱}{۲}$ می‌شود. به‌این ترتیب،عدد $۳^{۲k}$ برابر مجموع ۳^k جمله ازدنبالهٔعددهای‌طبیعی‌است‌که‌کوچکترین آنها $n+۱=\frac{۳^k+۱}{۲}$ است . مثلاً (برای $k=۱,۲,۳$) داریم :

$$۳^۲=۲+۳+۴,۳^۴=۵+۶+\cdots+۱۳,۳^۶=۱۴+۱۵+\cdots+۴۰$$

b) عدد F_n $(n=۲,۳,\cdots)$ فرد است . بنابراین اگر عدد F_n مساوی مجموع دو عدد اول باشد ، باید یکی ازآنها زوج ، یعنی‌مساوی ۲ و دیگری مساوی $F_n-۲$ باشد . ولی داریم :

$$F_n-۲=۲^{۲^n}-۱=(۲^{۲^{n-۱}}-۱)(۲^{۲^{n-۱}}+۱)$$

که وقتی $n>۱$ باشد ، عددی است مرکب‌زیرا $۲^{۲^{n-۱}}-۱\geqslant ۳$ است .

۲۱۴ . روشن است‌که‌اگر aو b دوعددحقیقی مثبت و $b-a>۱$

باشد ، بین aوb لااقل یك عدد طبیعی وجود دارد . در حقیقت ، این عدد عبارت از $[a]+۱$ است ($[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که بزرگتر از x نباشد) ، زیرا داریم : $a<[a]+۱\leqslant a+۱<b$.

فرض کنید s ، عددمفروض طبیعی بزرگتر ازواحد باشد. دراینصورت $\mu_s=\frac{۱}{(\sqrt[s]{۲}-۱)^s}$ عدد حقیقی و مثبتی است . برای عددهای طبیعی $n>\mu_s$ داریم : $n>\frac{۱}{(\sqrt[s]{۲}-۱)^s}$ و از آنجا :

$$\sqrt[s]{n}>\frac{۱}{\sqrt[s]{۲}-۱} \quad \text{و} \quad \sqrt[s]{n}(\sqrt[s]{۲}-۱)>۱$$

بنابراین :

$$\sqrt[s]{۲n}-\sqrt[s]{n}=\sqrt[s]{n}(\sqrt[s]{۲}-۱)>۱$$

و در نتیجه ، عدد طبیعی k وجود دارد بنحوی که داشته باشیم :

$$\sqrt[s]{n}<k<\sqrt[s]{۲n} \implies n<k^s<۲n$$

به‌این ترتیب می‌توان m_s را مساوی عدد $[\mu_s]+۱$ گرفت .

برای $s=۲$ داریم : $[\mu_۲]=۵$ و بین ۵ و ۱۰ یك مجذور کامل ($۳^۲$) وجود دارد ، در حالیکه بین ۴ و ۸ هیچ مجذورکاملی وجودندارد.

بنابراین کوچکترین عدد $m_۲$ مساوی ۵ است ، همچنین بسادگی می‌توان حساب کردکه کوچکترین عدد $m_۳$ مساوی ۳۳ است .

۲۱۵ . m را عدد طبیعی دلخواهی می‌گیریم . طبق قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ، عدد طبیعی x وجود دارد ، بنحوی که برای

$i=1,2,\cdots,m$ داشته باشیم :

$$x\equiv p_i-i+1 \pmod{p_i^2} \qquad (1)$$

که در آن p_i عبارتست از i امین عدد اول .

فاصلهٔ سلسلهٔ عددهای طبیعی که از m عدد $x+1, x+2, \cdots, x+m-1$ تشکیل شده است ، دارای خاصیت مورد نظر مسئله است ، زیرا داریم: $x+i-1=p_i^2k_i+p_i$ (k_i عددی است صحیح). بنابراین عدد $x+i-1$ برعدد اول p_i قابل قسمت ، ولی بر p_i^2 غیر قابل قسمت است . به‌این ترتیب این عدد نمی‌تواند توانی از یك عدد طبیعی بزرگتر از واحد باشد.

۲۱۶ . جواب : $u_n=3^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$. اثبات را می‌توان باکمك استقراء ریاضی انجام داد .

۲۱۷ . جواب: $u_n=(2-n)a+(n-1)b$ برای $n=1,2,\cdots$. اثبات به‌کمك استقراء ریاضی بدست می‌آید .

۲۱۸ . $u_n=(-1)^n[(n-2)a+(n-1)b]$ برای $n=1,2,\cdots$. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که رابطه برای $n=1$ و $n=2$ صحیح است. فرض می‌کنیم که به‌ازای عدد طبیعی n ، این رابطه برای u_n و u_{n+1} صحیح باشد ، با توجه به رابطهٔ $u_{n+2}=-(u_n+2u_{n+1})$ می‌توان بسهولت صحت رابطه را برای u_{n+2} تحقیق کرد. بنابراین اثبات به‌کمك استقراء ریاضی بدست می‌آید .

در حالت خاص $a=1$ و $b=-1$ داریم : $u_n=(-1)^{n+1}$ و برای $a=1$ و $b=-2$ بدست می‌آید: $u_n=(-1)^{n+1}.n$:

$$u_n=\frac{۳}{۴}[۳^{n-۲}+(-۱)^{n-۱}]a+\frac{۱}{۴}[۳^{n-۱}+(-۱)^n]b \quad .۲۱۹$$

برای $n=۱,۲,...$. اثبات با استفاده از روش استقراء ریاضی بدست می‌آید .

۲۲۰ . فقط دو عدد صحیح با این خاصیت وجود دارد : $a=۱$ و $a=-۱$. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این دو عدد در شرایط مفروض صدق می‌کنند . از این شرط معلوم می‌شود که برای $n=۱$ داریم : $a^a=a$. بنابراین اگر عدد صحیحی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد خواهیم داشت : $a^a\geqslant a^۲>a$ که ممکن نیست ، اگر $a\leqslant -۲$ باشد ، بدست می‌آید : $|a^a|=\frac{۱}{|a|^{|a|}}<۱$ که باز هم ممکن نیست ، زیرا $a^a=a$ و برای $a\leqslant ۲$ داریم : $|a^a|=|a|\geqslant ۲$.

۲۲۱* . a و b را دو عدد طبیعی دلخواه و $c^۲$ را بزرگترین مقسوم‌علیه عدد $a^۲+b^۲$ می‌گیریم : $a^۲+b^۲=kc^۲$. فرض می‌کنیم $x=a^۲k$ و $y=b^۲k$ ، دراینصورت

$$x+y=a^۲k+b^۲k=(a^۲+b^۲)k=(kc)^۲ \quad \text{و} \quad xy=(abk)^۲$$

حالا ثابت می‌کنیم که همهٔ زوج عددهای طبیعی را که مجموع و حاصلضرب مجذور کامل دارند ، می‌توان از این راه و با انتخاب عددهای طبیعی متناظر a و b بدست آورد .

فرض می‌کنیم $x+y=z^۲$ و $xy=t^۲$ باشد (z و t عددهای طبیعی هستند) . $d=(x,y)$ و $c_۱$ را بزرگترین مقسوم‌علیه مجذور کامل عدد d می‌گیریم ؛ به‌این‌ترتیب $d=kc_۱^۲$ که در آن k عددی طبیعی و غیر قابل قسمت بر یك مجذور کامل بزرگتر از واحد است . داریم :

$x=dx_1$ ، $y=dy_1$ که در آن $(x_1,y_1)=1$ است. از تساوی $x+y=z^2$ نتیجه می‌شود که $(x_1+y_1)d=z^2$ و از آنجا باید z^2 بر $d=k\cdot c_1^2$ قابل قسمت باشد و چون عدد k بر هیچ مجذور کامل بزرگتر از واحد قابل قسمت نیست z بر kc_1 قابل قسمت و بنابراین $z=kc_1z_1$ می‌شود که در آن z_1 عددی طبیعی است.

از آنجا $(x_1+y_1)d=x+y=z^2=k^2c_1^2z_1^2=kdz_1^2$ و در نتیجه $x_1+y_1=kz_1^2$ و $x_1y_1=\frac{t^2}{d^2}$ می‌شود که با توجه به اینکه $(x_1,y_1)=1$ است، نتیجه می‌شود که عددهای x_1 و y_1 مجذور کامل‌اند: $x_1=a_1^2$ ، $y_1=b_1^2$. بنابراین خواهیم داشت: $x=dx_1=k(c_1a_1)^2$ ، $y=dy_1=k(c_1b_1)^2$ که اگر $a=c_1a_1$ و $b=c_1b_1$ فرض کنیم خواهیم داشت: $x=ka^2$ ، $y=kb^2$ و ضمناً

$$a^2+b^2=(c_1a_1)^2+(c_1b_1)^2=c_1^2(x_1+y_1)=k(c_1z_1)^2$$

که با فرض $c_1z_1=c$ بدست می‌آید: $a^2+b^2=kc^2$. ضمناً چون k بر هیچ عدد مجذور کاملی بزرگتر از واحد قابل قسمت نیست، عدد c^2 بزرگترین مقسوم‌علیه مجذور کامل از عدد a^2+b^2 است.

همهٔ زوج عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ که هم مجموع و هم حاصلضرب آنها مجذور کامل باشند، عبارتند از:

۲,۲ ; ۵,۲۵ ; ۸,۸ ; ۱۰,۹۰ ; ۱۸,۱۸ ; ۲۰,۸۰ ; ۹,۱۶ ; ۳۲,۳۲ ;
۵۰,۵۰ ; ۷۲,۷۲ ; ۲,۹۸ ; ۳۶,۶۴

۲۲۳. جمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی (که با شرایط $u_1=u_2=1$ معین می‌شوند)، وقتی که بزرگتر از 10^4 نباشند،

بترتیب عبارتند از :

$$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,,۳۴,۵۵,۸۹,۱۴۴,۲۳۳,$$

$$۳۷۷,۶۱۰,۹۸۷,۱۵۹۷,۲۵۸۴,۴۱۸۱,۶۷۶۵$$

که در بین آنها مجذور کامل تنها عددهای $u_۱=u_۲=۱^۲$ و $u_{۱۲}=۱۲^۲$ و مکعب کامل عددهای $u_۱=u_۲=۱^۳$ و $u_۶=۲^۳$ است [۱۴].

تبصره. از جدول عددهای فیبوناچی و تجزیهٔ آنها به عوامل اول معلوم می‌شود که عددی بزرگتر از ۱۴۴ و کوچکتر از $۱۰^{۱۲}$ ، دراین دنباله وجود ندارد که توانی از یك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشد. ما نمی‌دانیم که آیا اصولا چنین عددهائی بزرگتر از ۱۴۴ وجود دارد یا نه ؟

۲۲۳* . صحت قضیه را با استفاده از استقراء روی عدد n، برای هر عدد طبیعی که بزرگتر از u_n نباشد ، ثابت می‌کنیم. حکم برای $n=۱$ صحیح است ، زیرا $u_۱=۱$ و برای $n=۲$، زیرا $u_۲=۱$ است و همچنین برای $n=۳$. زیرا $u_۴=۲$ است . حالا فرض می‌کنیم که n عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد و ضمناً فرض می‌کنیم که هر عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی u_n را بتوان به‌صورت مجموع جمله‌های مختلف دنبالهٔ فیبوناچی نوشت .

k را عدد طبیعی می‌گیریم که برای آن $u_n<k\leqslant u_{n+۱}$ باشد . اگر $k-u_n>u_{n+۱}$ باشد ، داریم :

$$u_{n+۱}\geqslant k>u_{n-۱}+u_n=u_{n+۱}$$

که ممکن نیست . بنابراین داریم : $۰<k-u_n\leqslant u_{n+۱}$.

به‌این ترتیب عدد طبیعی $k-u_n$ به صورت مجموعی از عددهای مختلف دنبالهٔ فیبوناچی است که بین آنها عدد u_n وجود ندارد ، زیرا

$k=(k-u_n)+u_n$ که $k-u_n \leqslant u_{n-1} < u_n$ است. از آنجا نتیجه می‌شود
مساوی مجموع چند عدد مختلف از دنبالهٔ فیبوناچی است . به این ترتیب
ثابت کردیم که هر یك از عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی u_{n+1} را
می‌توان به‌صورت مجموع عددهای مختلف دنبالهٔ فیبوناچی نوشت .

مثال : $۱=u_1$ ، $۲=u_2$ ، $۳=u_4=u_1+u_2$ ، $۴=u_1+u_4$ ،

$۷=u_3+u_5$ ، $۶=u_1+u_5$ ، $۵=u_5=u_3+u_4$ ،

$۱۰=u_3+u_6$ ، $۹=u_1+u_6$ ، $۸=u_6=u_4+u_5$.

۲۲۴ . اثبات را با استفاده از استقراء روی شمارهٔ n می‌دهیم .
رابطهٔ مفروض برای $n=۲$ صحیح است ، زیرا $۱^۲=۱.۲+(-۱)$
است . فرض می‌کنیم که این رابطه برای عدد طبیعی $n \geqslant ۲$ صحیح باشد.
در اینصورت داریم :

$$u_n^۲=u_{n-1}.u_{n+1}+(-۱)^{n-1}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$u_{n+1}^۲-u_n.u_{n+2}=u_{n+1}^۲-u_n(u_n+u_{n+1})=$$

$$=u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)-u_n^۲=u_{n+1}.u_{n-1}-u_n^۲=(-۱)^n$$

یعنی رابطهٔ حکم برای $n+۱$ هم صحیح است .

۲۲۵ . قبلا متذکر می‌شویم که از اتحاد

$$۶t=(t+۱)^۳+(t-۱)^۳+(-t)^۳+(-t)^۳$$

نتیجه می‌شود که هر عدد صحیح قابل قسمت بر ۶ را می‌توان به‌صورت

مجموعی از ۴ مکعب کامل نوشت .

چون برای هر عدد صحیح k و هر عدد طبیعی n ، وقتی $r=0,1,2,3,4,5$ باشد ، هر یك از عددهای $(6n+r)^3-6k+r$ بر ۶ قابل قسمت‌اند (زیرا وقتی r عددی صحیح باشد r^3-r بر ۶قابل قسمت است) ، بنابراین هر عدد صحیح را می‌توان به بی‌نهایت طریق به‌صورت مجموعی از پنج مکعب کامل نوشت .

۲۲۶ . اثبات این قضیه بلافاصله از اتحاد زیر نتیجه می‌شود :

$$3=(4+24n^3)^3+(4-24n^3)^3+(-24n^2)^3+(-5)^3$$

که برای $n=1,2,\ldots$ صحیح است .

۲۲۷ . اثبات با توجه‌به‌دواتحاد زیر ،که برای $t>8$ صحیح‌اند، بدست می‌آید :

$$(t-8)^2+(t-1)^2+(t+1)^2+(t+8)^2=(t-7)^2+$$
$$+(t-4)^2+(t+4)^2+(t+7)^2,$$

$$(t-8)^3+(t-1)^3+(t+1)^3+(t+8)^3=(t-7)^3+$$
$$+(t-4)^3+(t+4)^3+(t+7)^3$$

۲۲۸ . فرض می‌کنیم که یك برای عدد طبیعی m داشته باشیم : $4^{m}.7=a^2+b^2+c^2+d^2$ که‌درآن لااقل‌یکی ازعددهای a,b,c,d و مثلاً a در شرط $0\leqslant a<2^{m-1}$ صدق‌کند . دراینجا $a=0$نمی‌تواند باشد، زیرا دراینصورت عدد $4^{m}.7$ مساوی مجموع سه مربع کامل از عددهائی صحیح می‌شود ، که ممکن نیست . بنابراین $m>1$ و $a=2^k(2t-1)$ می‌شودکه $k\leqslant m-2$ عدد صحیح‌غیرمنفی و tعددی

طبیعی است . از آنجا :

$$۴^{m}.۷-[۲^{k}(۲t-۱)]^{۲}=۴^{k}[۴^{m-k}.۷-(۸u+۱)]=۴^{k}(۸v+۷)$$

که در آن v و u عددهائی صحیح‌اند (زیرا $k\leqslant m-۲$ و از آنجا $m-k\geqslant ۲$ است) و بنابراین

$$۴^{k}(۸v+۷)=b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}$$

که ممکن نیست .

تبصره. بسادگی می‌توان ثابت کرد که عدد $۴^{m}.۷$ (m عددی طبیعی است) را لااقل بیك طریق می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل از عددهای طبیعی نوشت ، زیرا داریم :

$$۴^{m}.۷=(۲^{m})^{۲}+(۲^{m})^{۲}+(۲^{m})^{۲}+(۲^{m}+۱)^{۲}$$

۲۲۹ . شش جواب برای کوچکترین عددهای طبیعی بزرگتر از ۲ ، که بتوان هر یك از آنها را به صورت مجموع دو مکعب کامل نوشت چنین‌اند :

$$۱^{۳}+۲^{۳}=۹,۲^{۳}+۲^{۳}=۱۶,۱^{۳}+۳^{۳}=۲۸,۲^{۳}+۳^{۳}=۳۵,$$
$$۳^{۳}+۳^{۳}=۵۴,۱^{۳}+۴^{۳}=۶۵$$

هیچیك ازعددهای ۹ ، ۱۶ ، ۲۸ ، ۳۵ و ۵۴ نمی‌توانند به‌صورت مجموع دو مربع کامل درآیند ، ولی $۸^{۲}+۱^{۲}=۶۵$ است .

بنابراین کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از ۲ که هم به‌صورت مجموع دو مربع کامل و هم به‌صورت دو مکعب کامل در می‌آید ، عدد ۶۵ است .

برای اینکه ثابت کنیم بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد ، که

بتوان هریك از آنهارا هم به‌صورت مجموع دو مربع کامل وهم به‌صورت مجموع دو مکعب کامل از عددهای طبیعی و نسبت بهم اول نوشت، کافی است توجه کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی k داریم :

$$۱+۲^{۶k}=۱۲+(۲^{۲k})^{۲}=۱^{۳}+(۲^{۲k})^{۳}$$

۲۳۰ . از این قبیل‌اند مثلا عددهای $۱+۲^{s!}$ ، زیرا $s!$ بر k قابل قسمت است $(k=۱,۲,\dots,s)$. واضح است که در اینجا بجای $s!$ می‌توان کوچکترین مضرب مشترك عددهای $۱,۲,\dots,s$ راگرفت .

۲۳۱* . مثلا همهٔ عددهای به صورت ۶.۸^{n} از این قبیل‌اند $(n=۰,۱,۲,\dots)$. در حقیقت هیچیك از این عددها مساوی مجموع مکعبات دو عدد صحیح نیستند ، زیرا در حالتی که n زوج باشد ، در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای مساوی ۶ می‌دهند و وقتی n فرد باشد باقیمانده‌ای مساوی ۳ ، ولی در تقسیم مجموع دو مکعب عددهای صحیح بر ۹ نمی‌توان به باقیمانده‌های ۳ یا ۶ (و همچنین ۴ یا ۵) رسید ، زیرا در تقسیم هر مکعب کامل یك عدد صحیح بر ۹ ، یکی از باقیمانده‌های ۰ ، ۱ یا ۱ — بدست می‌آید و بنابراین باقیماندهٔ تقسیم مجموع دو مکعب کامل بر ۹ مساوی ۰ ، ۱ ، ۱ — ، ۲ یا ۲ — می‌شود .

ولی بسادگی می‌توان تحقیق کرد :

$$۶=\left(\frac{۱۷}{۲۱}\right)^{۳}+\left(\frac{۳۷}{۲۱}\right)^{۳}$$

و از آنجا :

$$۶.۸^{n}=\left(\frac{۱۷.۲^{n}}{۲۱}\right)^{۳}+\left(\frac{۳۷.۲^{n}}{۲۱}\right)^{۳}$$

بنابراین عددهای ۶.۸^n $(n=۰,۱,۲,\dots)$ مـی‌توانند به صورت مجموع مکعبات دو عدد گویا نوشته شوند .

۲۳۲* . اثبات آ . **شینتسل** را می‌آوریم .

مثل عددهای به‌صورت ۷.۸^n از این قبیل‌اند $(n=۰,۱,۲,\dots)$ در حقیقت از یکطرف داریم : $۷.۸^n=(۲^n)^۳-(۲^n+۱)^۳$ ، از طرف دیگر ثابت می‌کنیم که هیچیك ازعددهای ۷.۸^n مساوی مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی نیستند . این مطلب بسادگی برای حالتهای $n=۰$ و $n=۱$ تحقیق می‌شود . حالا فرض می‌کنیم که عدد طبیعی n وجود داشته باشد بنحوی که ۷.۸^n مساوی مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی باشد ؛ می‌توان n راکوچکترین‌این عددها در نظر گرفت ؛ به‌این‌ترتیب $n\geqslant ۲$ می‌شود و

$$۷.۸^n=x^۳+y^۳=(x+y)(x^۲-xy+y^۲)$$

که در آن xوy عددهائی طبیعی هستند . چون سمت چپ تساوی‌عددی زوج است ، عددهای xوy یا هر دو زوج و یا هر دو فرد می‌شوند .

اگر xوy عددهائی فـرد باشند ، عدد $x^۲-xy+y^۲$ هـم فـرد می‌شود و چون عدد سمت چپ تنها دومقسوم‌علیه فرد دارد : ۱ و ۷ ، یا $x^۲-xy+y^۲=۱$ و یا $x^۲-xy+y^۲=۷$ می‌شود . در حالت اول $x^۳+y^۳=x+y$ می‌شود و چون xوy عددهائی طبیعی هستند باید $x=y=۱$ باشد ، بنابراین $۷.۸^n=۲$ می‌شود که ممکن نیست . اگر $x^۲-xy+y^۲=۷$ باشد ، باید داشته باشیم :

$$(۲x-y)^۲+۳y^۲=(۲y-x)^۲+۳x^۲=۲۸$$

که از آنجا بدست می‌آید : $۳x^۲ \leqslant ۲۸$ و $۳y^۲ \leqslant ۲۸$ و بنابراین $x \leqslant ۳$ و $y \leqslant ۳$ و از آنجا $x^۳+y^۳ \leqslant ۵۴$ که بازهم ممکن نیست ، زیرا داریم:

$$x^۳+y^۳ = ۷.۸^n \geqslant ۷.۸^۲$$

بنابراین x و y هر دو زوج‌اند : $x=۲x_۱ ، y=۲y_۱$ ($x_۱$ و $y_۱$ عددهائی طبیعی‌هستند) . چون $۷.۸^n = x^۳+y^۳$ بود بدست می‌آید : $۷.۸^{n-۱} = x_۱^۳+y_۱^۳$ که برخلاف تعریف عدد n است .

به‌این ترتیب ثابت کردیم که عدد ۷.۸^n ($n=۰,۱,۲,...$) دارای خاصیت مورد نظر مسئله است .

تبصره، می‌توان ثابت‌کردکه بی‌نهایت عدد طبیعی وجود داردکه بریك مکعب‌کامل بزرگتر از واحد قابل قسمت نیستند وبه‌صورت مجموع مکعبهای دو عددگویا هم در نمی‌آیند (اثبات مشکل است) . عددهای‌کوچکتر از ۵۰ که دارای این خاصیت‌اند چنین‌اند :

۳,۴,۵,۱۰,۱۱,۱۴,۱۸,۲۱,۲۳,۲۵,۲۹,۳۶,۳۸,۳۹,۴۱,۴۴,۴۵,۴۶,۴۷

عدد ۲۲ را می‌توان به صورت مجموع مکعبهای دو عدد گویا نوشت (البته با مخرجهای بزرگ) :

$$۲۲ = \left(\frac{۱۷۲۹۹}{۹۹۵۴}\right)^۳ + \left(\frac{۲۵۴۶۹}{۹۹۵۴}\right)^۳$$

۲۳۳* . اثبات آ . شینتسل .

مثلاً عددهای $۲^{nk}(۲^k-۱)$ دارای این خاصیت‌اند ($n=۰,۱,۲,..$)

در حقیقت چون داریم :

$$(۲^k-۱)۲^{nk} = (۲^n+۱)^k - (۲^n)^k$$

این مطلب باقی‌ماندکه ثابت‌کنیم ، معادلهٔ

$$(۲^k-۱)۲^{nk}=u^k+v^k \qquad (۱)$$

برای عددهای u و v جواب ندارد . این حکم برای $n=۰$ صحیح است، زیرا $۱^k+۱^k<۲^k-۱<۲^k+۱^k$.

فرض می‌کنیم عددهای طبیعی برای n وجودداشته باشد که به‌ازای آنها معادلهٔ (۱) برای عددهای طبیعی u و v دارای جواب باشد و n را کوچکترین آنها می‌گیریم . اگر عددهای u و v هر دو زوج باشد : $u=۲u_۱$ ، $v=۲v_۱$ ، با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$(۲^k-۱)۲^{(n-۱)k}=u_۱^k+v_۱^k$$

که برخلاف فرض ما دربارهٔ عدد n است . بنابراین ، چون سمت چپ معادلهٔ (۱) عددی زوج است ، باید عددهای u و v هر دو فرد باشند.

k را عدد فردی بزرگتر از ۳ می‌گیریم . دراینصورت از رابطهٔ

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=u^{k-۱}-u^{k-۲}v+u^{k-۳}v^۲\ldots+v^{k-۱}$$

(در سمت راست این رابطه k جمله وجود دارد که همهٔ آنها عددهائی فرد هستند) ، نتیجه می‌شود که سمت چپ عددی فرد است وچون مقسوم‌علیهی از $۲^{nk}(۱-۲^k)$ است ، خواهیم داشت :

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}\leqslant ۲^k-۱$$

می‌توانیم $u\geqslant v$ فرض کنیم . دراینصورت

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}\geqslant v^{k-۱}$$

وبنابراین $v^{k-1}<2^k$ واز آنجا $v<2^{\frac{k}{k+1}}<3$ می‌شود (چون $k>3$ بود) و چون v عددی است فرد ، پس $v=1$ می‌شود . از آنجا

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{u^k+1}{u+1}>u^{k-2}(u-1)>(u-1)^{k-1}$$

بنابراین $(u-1)^{k-1}<2^k$ که می‌دهد $u-1<3$ و از آنجا ، با توجه به‌فرد بودن عدد u یا $u=1$ و یا $u=3$ می‌شود . حالت $u=1$ ممکن‌نیست، زیرا منجر به‌تساوی $u^k+v^k=2$ می‌شود که با تساوی(۱) نمی‌سازد .

حالت $u=3$ هم ممکن نیست ، زیرا بدست می‌آید :

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{3^k+1}{4}$$

که از 2^k-1 بزرگتر است (برای $k>3$) .

حالا فرض می‌کنیم که k عدد زوج طبیعی باشد . با توجه به فرد بودن عددهای u و v ، عدد u^2+v^2 در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ می‌دهد که ممکن نیست، زیرا سمت چپ رابطهٔ (۱) بر ۴ قابل‌قسمت است .

به‌این ترتیب قضیه ثابت شد .

تبصره. (آ.روتکویچ) . برای هر عدد طبیعی $n>1$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود داردکه مساوی مجموع توانهای n ام دو عدد طبیعی باشد،ولی مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی نباشد .

اثبات . اگر n بر ۲ قابل قسمت باشد ، برای عددهای طبیعی k و l عدد $(2k+1)^n+(2l+1)^n$ مساوی‌مجموع توانهای n ام دو عدد طبیعی

است ، ولی (چون به‌صورت $۲+۴t$ است) نمی‌تواند مساوی تفاضل مربعهای دو عدد طبیعی باشد ، یعنی مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی هم نیست. اگر n بر ۲ قابل‌قسمت نباشد، عدد $(۲^k)^n+(۲k+۱)^n$ بر $(۲^n+۱)$ برای $k=۰,۱,۲,\ldots$، مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی نیست . در حقیقت اگر داشته باشیم : $(۲^n+۱)۲^{nk}=x^n-y^n$ ، که در آن x و y $(x>y)$ عددهائی طبیعی هستند ، عددهای $x_۱=\frac{x}{(x,y)}$ و $y_۱=\frac{y}{(x,y)}$ عددهای طبیعی هستند و نمی‌توانند هر دو زوج باشند ، از آنجا بسادگی معلوم می‌شود که $\frac{x_۱^n-y_۱^n}{x_۱-y_۱}$ بر ۲ قابل‌قسمت نیست و چون داریم :

$$(۲^n+۱)۲^{nk}=(x,y)^n(x_۱-y_۱)\frac{x_۱^n-y_۱^n}{x_۱-y_۱},$$

معلوم می‌شود که $۲^n+۱$ بر $\frac{x_۱^n-y_۱^n}{x_۱-y_۱}$ قابل قسمت و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{x_۱^n-y_۱^n}{x_۱-y_۱}\leqslant ۲^n+۱$$

ولی داریم : $\frac{x_۱^n-y_۱^n}{x_۱-y_۱}>x_۱^{n+۱}\geqslant ۳^{n-۱}$ (چون $x_۱=۲$ نمی‌تواند باشد، زیرا در اینصورت $y_۱=۱$ می‌شود، یعنی $۲^n+۱$ بر $۲^n-۱$ قابل قسمت می‌شود که ممکن نیست)، بنابراین $۲^n+۱<۳^{n-۱}$ می‌شود که برای $n\geqslant ۳$ ممکن نیست .

۲۳۴ . رابطهٔ زیر واضح است :

$$۱^۲+۲^۲+\ldots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

بنابراین باید کوچکترین عدد طبیعی $n>۱$ را چنان پیدا کنیم

که $n(n+1)(2n+1)=6m^2$ باشد (m عددی طبیعی است). ۶ حالت در نظر می‌گیریم :

۱) $n=6k$ (k عددی طبیعی است) . معادلهٔ مفروض به‌صورت $k(6k+1)(12k+1)=m^2$ درمی‌آید. در اینجا عوامل سمت‌چپ تساوی دو به‌دو نسبت بهم اولند ، یعنی همه باید مجذور کامل باشند. اگر $k=1$ باشد، $6k+1$ مجذور کامل نیست. اگر $k=4$ باشد $6k+1=5^2$ و $12k+1=7^2$ می‌شود و بنابراین برای $n=6k=24$ مجموع $1^2+2^2+\dots+24^2$ مساوی مجذور عدد ۷۵ می‌شود .

۲) $n=6k+1$ (k عددی طبیعی است) . داریم :

$$(6k+1)(3k+1)(2k+1)=m^2$$

و هر یك ازعددهای $2k+1$ ، $3k+1$ و $6k+1$ (که دو به دو نسبت بهم اولند) باید مجذور کامل باشند .

کوچکترین عدد k که به‌ازای آن عدد $2k+1$ مجذور کامل باشد $k=4$ است که در این صورت $n=6k+1>24$ می‌شود .

۳) $n=6k+2$ (k عددی طبیعی و یا صفر است) . بدست می‌آید :

$$(3k+1)(2k+1)(12k+5)=m^2$$

و عددهای $2k+1$ ، $3k+1$ و $12k+5$ (که دو به دو نسبت بهم اولند) باید مجذور کامل باشند. اگر $k=0$ باشد $2k+5$ مجذور کامل نیست و برای اینکه $2k+1$ ($k\neq 0$) مجذور کامل شود باید $k\geqslant 4$ باشد که از آنجا $n=6k+2>24$ می‌شود .

۴) $n=6k+3$ ($k\geqslant 0$ عددی صحیح است) . داریم :

$$(2k+1)(3k+2)(12k+7)=m^2$$

که ضمناً بسادگی روشن می‌شود که عددهای $2k+1$ ، $3k+2$ و $12k+7$ دو به دو نسبت بهم اولند ، یعنی باید هر کدام مجذور کامل باشند . چون عدد $3k+2$ به ازای $k=0,1,2,3$ مجذورکامل‌نیست باید $k\geqslant 4$ باشد ، که در آنصورت $n=6k+3>24$ می‌شود .

۵) $n=6k+4$ ($k\geqslant 0$ عددی است صحیح) . داریم :

$$(3k+2)(6k+5)(4k+3)=m^2$$

که چون عددهای $3k+2$ ، $4k+3$ و $6k+5$ دو بـه دو نسبت بهم اولند ، باید هرکدام مجذورکامل باشند . در اینجا k نمی‌تواند یکی‌از عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ باشد ، زیرا عدد $3k+2$ مجذورکامل نیست . بنابراین $k\geqslant 4$ و از آنجا $n=6k+4>24$ می‌شود .

۶) $n=6k+5$ ($k\geqslant 0$ عددی است صحیح) . داریم :

$$(6k+5)(k+1)(12k+11)=m^2$$

که در آن عددهای $6k+5$ ، $k+1$ و $12k+11$ دو به دو نسبت‌بهم اول و بنابراین باید هرکدام مجذورکامل باشند . در اینجا k نمی‌تواند یکی ازعددهای ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ باشد ، زیرادراینصورت $6k+5$ مجذور کامل نیست . بنابراین $k\geqslant 4$ و ازآنجا $n=6k+5>24$ می‌شود .

به‌این ترتیب ثابت‌کردیم که کوچکترین عدد طبیعی $n>1$، که به‌ازای آن $1^2+2^2+\ldots+n^2$ مساوی‌یك‌مجذورکامل باشد $n=24$ است .

تبصره. با سختی می‌توان ثابت کرد که $n=۲۴$ تنها عدد طبیعی بزرگتر از واحد است که به‌ازای آن مجموع $n^۲+\ldots+۲^۲+۱^۲$ مساوی مجذور کامل یك عدد طبیعی باشد. در حالیکه مجموع $n^۳+\ldots+۲^۳+۱^۳$ برای هر عدد طبیعی $n>۱$ مجذور کامل است ولی به‌ازای هیچ عدد طبیعی $n>۱$ نمی‌تواند مکعب کامل باشد.

۲۳۵ . a) عددهای مورد نظر عبارتند از همهٔ عددهای طبیعی بجز عددهای زیر:

$$۱,۲,۳,۵,۶,۷,۱۰,۱۱,۱۴,۱۵,۱۹,۲۳$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که هیچکدام از این ۱۲ عدد نمی‌توانند مساوی مجموع محدودی از توانهای صحیح باشند (این توانهای صحیح بترتیب مقدار آنها عبارتند از $۲^۲,۲^۳,۳^۲,۴^۲=۴^۲,۲^۴,۵^۲,۳^۳,۲^۵,۶^۲,\ldots$).

حالا فرض می‌کنیم n عددی طبیعی وغیر از ۱۲ عدد نامبرده باشد.

اگر $n=۴k$ باشد (k عددی است طبیعی)، دراینصورت عدد n برابر است با مجموع k عدد مساوی $۲^۲$.

اگر $n=۴k+۱$ باشد، چون $n\neq۱$ و $n\neq۵$ است، می‌توان فرض کرد $k\geqslant۲$ بنحوی که داشته باشیم: $n=۴k+۱=۳^۲+۴(k-۲)$ که در آن $k-۲\geqslant۰$ عددی است صحیح. اگر $k=۲$ باشد $n=۳^۲$ و اگر $k>۲$ باشد $n=۳^۲+۲^۲+\ldots+۲^۲$ می‌شود که تعداد جمله‌های $۲^۲$ در آن مساوی $k-۲$ است.

اگر $n=۴k+۲$ باشد، چون n مساوی ۶، ۱۰ و ۱۴ نیست داریم $k\geqslant۴$ و $n=۴k+۲=۳^۲+۳^۲+۴(k-۴)$ و از آنجا نتیجه می‌شود که n دارای خاصیت مورد نظر مسئله است.

بالاخره اگر $n=۴k+۳$ باشد، چون n مساوی عددهای ۳، ۷،

۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ و ۲۳ نیست $k \geqslant 6$ و $n = 3^3 + 4(k-6)$ مـی‌شود و بنابراین صحت حکم در این حالت هم ثابت می‌شود .

b) داریم :

$$1 = 3^2 - 2^3, 2 = 3^3 - 5^2, 3 = 2^7 - 5^3, 4 = 5^3 - 11^2 = 2^3 - 2^2,$$
$$5 = 3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3, 7 = 2^7 - 11^2, 8 = 2^4 - 2^3, 9 = 5^2 - 4^2,$$
$$10 = 13^3 - 37$$

تبصره. نمی‌دانیم که آیا ۶ می‌تواند مساوی تفاضل دو توان صحیح باشد یا نه ؟

این هنوز یك فرضیه است که هرعدد طبیعی را می‌توان به‌صورت تفاضل دو توان صحیح نوشت .

۲۳۶ . اگر $a^2 + b^2 = c^2$ و a ، b و c عددهائی طبیعی باشند، با ضرب طرفین تساوی در

$$a^{2(4n^2-1)} . b^{4n(2n+1)(n-1)} . c^{4n^2(2n-1)}$$

بدست می‌آید :

$$\left[(a^{2n} b^{(2n+1)(n-1)} c^{n(2n-1)})^{2n}\right]^2 + \left[(a^{2n+1} b^{2n^2-1} c^{2n^2})^{2n-1}\right]^2 =$$
$$= \left[(a^{2n-1} b^{2n(n-1)} c^{2n^2-2n+1})^{2n+1}\right]^2$$

۲۳۷ . تنها یك عدد طبیعی با این خاصیت وجـود دارد: $n = 5$. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این عدد در معادلهٔ $n^2 = 1 + (n-1)!$ صدق می‌کند و همچنین عددهای ۲ ، ۳ و ۴ در آن صـدق نمی‌کنند . برای $n = 6$ داریم $n^2 > 6n - 4$ و به‌کمك استقراء ریاضی بسادگی ثابت می‌شود که این نامساوی برای هر عدد طبیعی $n \geqslant 6$ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۶ باشد داریم :

$$(n-1)!+1>2(n-1)(n-2)=n^2+[n^2-(6n-4)]>n^2$$

چون $n^2>6n-4$ بود . به این ترتیب برای عددهای طبیعی $n>5$ تساوی $n^2=(n-1)!+1$ ممکن نیست .

تبصره. تنها دو عدد طبیعی بزرگتر از ۵ شناخته شده است که به‌ازای آنها $(n-1)!+1$ بر n^2 قابل قسمت است . یعنی عددهای ۱۳ و ۵۶۳. عددهای دیگری با این خاصیت نمی‌شناسیم و نمی‌دانیم که آیا تعداد آنها محدود است یا نامحدود. ولی این مطلب معلوم است که هر عددی با این خاصیت باید اول باشد .

متذکر می‌شویم که به‌ازای $n=5,6,8$ ، عدد $(n-1)!+1$ مجذور کامل است (بترتیب مجذور عددهای ۵ ، ۱۱ و ۷۱ بدست می‌آید) ، ولی معلوم نیست که آیا عددهای دیگری با این خاصیت وجود دارد یا نه ؟

۲۳۸ . اگر برای عدد طبیعی $n>1$ داشته باشیم: $t_{n-1}.t_n=m^2$ (m عددی طبیعی است) باید داشته باشیم : $(n^2-2)n^2=(2m)^2$ و چون n^2 و n^2-1 نسبت بهم اولند باید هرکدام مجذور کامل باشند که ممکن نیست ، زیرا تقاضل دو مجذور کامل نمی‌تواند مساوی واحد باشد .

حالا n را عدد طبیعی مفروضی می‌گیریم . در این‌صورت معادلهٔ $x^2-n(n+1)y^2=1$ برای عددهای طبیعی x و y دارای بی‌نهایت جواب است . در حقیقت یکی ازاین جوابها $x=2n+1$ و $y=2$ است واگر به‌ازای عددهای طبیعی x و y معادلهٔ $x^2-n(n+1)y^2=1$ برقرار باشد معادلهٔ زیر هم برقرار است :

$$[(2n+1)x+2n(n+1)y]^2-n(n+1)[2x+(2n+1)y]^2=1$$

بالاخره اگر برای عددهای طبیعی xوy داشته باشیم : $x^۲-n(n+۱)y^۲=۱$ ، دراینصورت داریم :

$$t_n.t_{۲t_n y^۲}=t_n.t_n.y^۲(۲t_n.y^۲+۱)=t_n^۲.y^۲.x^۲=(t_n.yx)^۲$$

مثلا برای $n=۲$ داریم :

$$t_۲.t_{۲۴}=۳۰^۲\ ,\ t_۲.t_{۲۴۰۰}=(۳۰.۲۰.۴۹)^۲$$

$۲^{۱۰}=۱۰۲۴>۱۰^۳$. از آنجا داریم : ۲۳۹

$$۲^{۱۹۴۵}=۲^۵\ (۲^{۱۰})^{۱۹۴}>۱۰.۱۰^{۳.۱۹۴}=۱۰^{۵۸۳},$$

$$۲^{۲^{۱۹۴۵}}>۲^{۱۰^{۵۸۳}}=(۲^{۱۰})^{۱۰^{۵۸۲}}>۱۰^{۳.۱۰^{۵۸۲}}$$

و عدد اخیر هم بیش از $۱۰^{۵۸۲}$ رقم دارد .

تعداد رقمهای عدد $۵.۲^{۱۹۴۷}+۱$ برابراست با تعداد رقمهای‌عدد $۱۰.۲^{۱۹۴۶}=۵.۲^{۱۹۴۷}$وچون‌داریم:$\log_{۱۰}۲=۰,۳۰۱۰۳۰...$، دراینصورت:

$$۲^{۱۹۴۶}=۱۰^{۱۹۴۶\log۲}=۱۰^{۵۸۵,۸...}$$

و از آنجانتیجه می‌شود که عدد $۵.۲^{۱۴۹۷}+۱$ دارای ۵۸۷ رقم است .

تبصره. عدد $F_{۱۹۴۵}$ بزرگترین عدد مرکبی است‌که از عددهای فرما شناخته شده است .

۲۴۰ . واضح است‌که تعدادرقمهای عدد $۲^{۱۱۲۱۳}-۱$ (دردستگاه عدد شماری به‌مبنای ۱۰) برابر است با تعداد رقمهای عدد $۲^{۱۱۲۱۳}$ ، که تنها در رقم‌آخر باآن اختلاف دارد . بنابراین کافی است تعداد رقمهای عدد اخیر را پیداکنیم .

اگر n عددی طبیعی به‌صورت ۱۰^x باشد($x\geqslant ۰$عددی‌است‌حقیقی)

و [x] را بزرگترین عدد صحیحی بگیریم که از x بزرگتر نباشد ، داردیم : $۱۰^{[x]} \leqslant n < ۱۰^{[x]+۱}$ ، از آنجا نتیجه می‌شود که عدد n ۱+[x] رقم‌دارد،ازطرف‌دیگرداریم: $۱۰^{۱۱۲۱۳ \log ۲} = ۲^{۱۱۲۱۳}$ وچون‌داریم $۳۳۷۵ < ۱۱۲۱۳ \log ۲ < ۳۳۷۶$ ، در اینصورت $\log ۲ = ۰,۳۰۱۰۳$ .. و بنابراین‌عدد $۲^{۱۱۲۱۳} - ۱$ شامل ۳۳۷۶ رقم‌است (دردستگاه عدد شماری به‌مبنای ۱۰).

۲۴۱ . داریم :

$$۲^{۱۱۲۱۲}(۲^{۱۱۲۱۳} - ۱) = ۲^{۲۲۴۲۵} - ۲^{۱۱۲۱۲}$$

ابتداد تعدادرقمهای‌عدد $۲^{۲۲۴۲۵}$ را محاسبه می‌کنیم. چون‌داریم :

$$۲۲۴۲۵ \log_{۱۰} ۲ = ۲۲۴۲۵.۰,۳۰۱۰۳... = ۶۷۵۰,۵۹۷...$$

در اینصورت (حل مسئلهٔ ۴۰ را ببینید) ، عدد $۲^{۲۲۴۲۵}$ دارای ۶۷۵۱ رقم است . از طرف دیگر داریم :

$$۲^{۲۲۴۲۵} = ۱۰^{۶۷۵۰.۱۰۰,۵۹۷...}$$

و چون $۱۰^{\frac{۱}{۲}} < ۱۰^{۱۰۰,۵۹۷...} < ۳$ ، پس

$$۳.۱۰^{۶۷۵۰} > ۲^{۲۲۴۲۵} > ۱۰^{۶۷۵۱}$$

از آنجا نتیجه می‌شودکه اولین رقم‌عدد $۲^{۲۲۴۲۵}$ باید بزرگتر یا مساوی ۳ باشد . بنابراین تعداد رقمهای عدد $۲^{۲۲۴۲۵}$ ، با کم کردن $۲^{۱۱۲۱۲}$ از آن (که رقمهای کمتری دارد) ، تغییر نمی‌کند . به این ترتیب عدد $۲^{۱۱۲۱۲}(۲^{۱۱۲۱۳} - ۱)$ دارای ۶۷۵۱ رقم است .

۲۴۲ . داریم :

$$۱۰^{۱۲۴۲} < ۹۹!.۱۰۰۶۲۱ < ۳!!! = ۷۲۰! \quad , \quad ۳!! = ۶! = ۷۲۰ \quad , \quad ۳! = ۶,۳!! = ۶!$$

یعنی عدد !!! ۳ بیش از هزار رقم دارد .

براساس قضیه‌ای* که طبق آن : اگر m عددی طبیعی و p عددی اول باشد، بزرگترین توان عدد p که مقسوم‌علیهی از $m!$ باشد، عبارتست از

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots$$

منظور از $[x]$ عبارتست از بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر یا مساوی x باشد . از اینجا معلوم می‌شود که بزرگترین توان ۵ که مقسوم‌علیه $۷۲۰!=(۳!)!!$ باشند ، چنین است :

$$\left[\frac{۷۲۰}{۵}\right]+\left[\frac{۷۲۰}{۲۵}\right]+\left[\frac{۷۲۰}{۱۲۵}\right]+\left[\frac{۷۲۰}{۶۲۵}\right]=۱۴۴+۲۸+۵+۱=۱۷۸$$

و بزرگترین توان ۲ که مقسوم‌علیه $۷۲۰!$ است از ۱۷۸ بزرگتر است، زیرا $\left[\frac{۷۲۰}{۲}\right]=۳۶۰$ می‌شود . بنابراین روشن می‌شود که عدد $۷۲۰!=(۳!)!!$ به ۱۷۸ صفر ختم می‌شود .

۳۴۳* . حل **آ. شینتسل** را می‌آوریم .

این خاصیت برای عددهای طبیعی m وجود دارد که توانی از یك عدد اول باشند (با نمای طبیعی) و تنها برای چنین عددهائی از m .

درحقیقت اگر $m=p^k$ باشد (p عددی اول و k عددی طبیعی است) ، برای $f(x)=x^{\varphi(p^k)}$ ، در حالتی که x بر p قابل قسمت نباشد طبق قضیهٔ اولر داریم : $f(x)\equiv ۱ (\mathrm{mod} p^k)$ ودرحالتی که x بر p قابل قسمت باشد x^k هم بر p^k قابل قسمت است و چون $\varphi(p^k)\geqslant p^{k-۱}\geqslant k$ (که

*) اثبات این قضیه را در ضمیمه کتاب ببینید .

بسادگی و به‌کمك استقراء ریاضی برای عددهای طبیعی k ثابت می‌شود)، $x^{\varphi(p^k)}$ بر p^k قابل قسمت و بنابراین $f(x)\equiv 0 \pmod{p^k}$ می‌شود.

اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از واحد باشدولی‌توانی‌ازیك عدد اول نباشد ، لااقل دو مقسوم‌علیه اول مختلف دارد : p و $q\neq p$.فرض می‌کنیم $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح و عددهای صحیح x_1 و x_2 چنان باشندکه $f(x_1)\equiv 0 \pmod{m}$ و $f(x_2)\equiv 1 \pmod{m}$ باشد دراینصورت چون m بر p و q قابل قسمت است $f(x_1)\equiv 0 \pmod{p}$ و $f(x_2)\equiv 1 \pmod{q}$ می‌شود . ولی p و q دو عدد اول مختلف‌اند ، بنابراین با توجه به قضیهٔ چینی در مورد باقیمانده‌ها عدد صحیح x_0 وجود دارد بنحوی‌که $x_0\equiv x_1 \pmod{p}$ و $x_0\equiv x_2 \pmod{q}$ باشد که از آنجا بدست می‌آید :

$$f(x_0)\equiv f(x_1)\equiv 0 \pmod{p} \ , \ f(x_0)\equiv f(x_2)\equiv 1 \pmod{q}$$

ازهمنهشتی‌اول نتیجه می‌شودکه $f(x_0)\equiv 1 \pmod{m}$ نمی‌تواند برقرار بـاشد و از همنهشتی دوم نتیجه شودکه $f(x_0)\equiv 0 \pmod{m}$ برقرار نیست .

بداین ترتیب درتقسیم $f(x_0)$ بر m نه‌باقیماندهٔ صفرونه باقیماندهٔ ۱ بدست نمی‌آید . بنابراین اگر m توانی از یك عدد اول نباشد، هیچ کثیرالجملهٔ $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود نداردکه‌باشرایط‌مسئله‌بسازد.

۲۴۴ . بسادگی می‌توان فهمیدکه

$$D<[(4m^2+1)n+m+1]^2$$

بنابراین قسمت‌صحیح عدد $\sqrt{D}$ عبارتست‌از $a_0=(4m^2+1)n+m$،

از آنجا

$$D-a_0^2=4mn+1$$

به‌این ترتیب : $\sqrt{D}=a_0+\frac{1}{x_1}$ و $x_1=\frac{1}{\sqrt{D}-a_0}=\frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}$.

چون a_0 قسمت صحیح عدد $\sqrt{D}$ است، داریم: $a_0<\sqrt{D}<a_0+1$

و از آنجا

$$2a_0<\sqrt{D}+a_0<2a_0+1$$

که با توجه به‌اینکه $a_0=(4mn+1)m+n$ است ، بدست می‌آید :

$$2m+\frac{2n}{4mn+1}<\frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}<2m+\frac{2n+1}{4mn+1}$$

از آنجا ، چون $\frac{2n+1}{4mn+1}<1$ است ، نتیجه می‌شود که قسمت صحیح عدد $x_1=\frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}$ عبارتست ازعدد $a_1=2m$. به‌این‌ترتیب

$x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$ و $x_2=\frac{1}{x_1-a_1}$.

از طرف دیگر داریم :

$$x_1-a_1=\frac{\sqrt{D}+a_0}{4mn+1}-2m=\frac{\sqrt{D}-[(4mn+1)m-n]}{4mn+1}$$

بنابراین :

$$x_2=\frac{(4mn+1)[\sqrt{D}+(4mn+1)m-n]}{D-[(4mn+1)m-n]^2}$$

ولی بسادگی می‌توان تحقیق کرد :

$$D=[(۴mn+۱)m-n]^۲+(۴mn+۱)^۲$$

و بنابراین :

$$x_۲=\frac{\sqrt{D}+(۴mn+۱)m-n}{۴mn+۱}$$

و چون $a_۰<\sqrt{D}<a_۰+۱$ است ، بترتیب داریم :

$$(۴mn+۱)m+n<\sqrt{D}<(۴mn+۱)m+n+۱,$$

$$۲m<x_۲<۲m+\frac{۱}{۴mn+۱}$$

یعنی قسمت صحیح عدد $x_۲$ عبارتست از $a_۲=۲m$. بنابراین $x_۲=a_۲+\frac{۱}{x_۳}$ و $x_۳=\frac{۱}{x_۲-a_۲}$ می‌شود و داریم :

$$x_۲-a_۲=\frac{\sqrt{D}+(۴mn+۱)m-n}{۴mn+۱}-۲m=$$

$$=\frac{\sqrt{D}-(۴mn+۱)m-n}{۴mn+۱}$$

و بنابراین

$$x_۳=\frac{(۴mn+۱)\sqrt{D}+(۴mn+۱)m+n}{D-[۴mn+۱)m+n]^۲}=$$

$$=\sqrt{D}+(۴mn+۱)m+n=\sqrt{D}+a_۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که قسمت صحیح عدد $x_۰$ عبارتست از $۲a_۰$ و عدد $\sqrt{D}$ به‌کسر مسلسلی با تناوب سه جمله‌ای تبدیل می‌شود این سه جمله عبارتند از $۲m$ ، $۲m$ و $۲a_۰$.

تبصره. می‌توان ثابت‌کرد که همهٔ عددهای طبیعی D ،که در تجزیهٔ $\sqrt{D}$ به‌کسر مسلسل ، شامل دورهٔ تناوب سه جمله‌ای هستند ، به‌صورت عدد

D هستند که در این مسئله مورد مطالعه قرار دادیم .

۲۴۵ . اگر تجزیهٔ عدد n به عوامل اول معلوم باشد :

$$n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

برای $\varphi(n)$ و $d(n)$ روابط زیر را داریم :

$$\varphi(n) = q_1^{\alpha_1 - 1}(q_1 - 1) \cdots q_s^{\sigma_s - 1}(q_s - 1),$$

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_s + 1)$$

مقادیر توابع $\varphi(n)$ و $d(n)$ را برای $n \leqslant ۳۰$ حساب می‌کنیم ، بسادگی معلوم می‌شود که برای $n \leqslant ۳۰$ وقتی $\varphi(n) = d(n)$ است که n یکی از عددهای ۱ ، ۳ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۸ ، ۲۴ و ۳۰ باشد :

$$\varphi(۱) = d(۱) = ۱ \ , \ \varphi(۳) = d(۳) = ۲ \ , \ \varphi(۸) = d(۸) = ۴,$$

$$\varphi(۱۰) = d(۱۰) = ۴, \varphi(۱۸) = d(۱۸) = ۶, \varphi(۲۴) = d(۲۴) = ۸ ,$$

$$\varphi(۳۰) = d(۳۰) = ۸$$

تبصره. ثابت می‌شود که معادلهٔ $\varphi(n) = d(n)$ برای دیگر عددهای طبیعی n جواب ندارد ، یعنی می‌توان ثابت کرد که اگر $n > ۳۰$ باشد ، $\varphi(n) > d(n)$ است .

۲۴۶ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که برای عدد طبیعی k و عدد صحیح $s \geqslant ۰$ داریم :

$$\left(۱ + \frac{۱}{k}\right)\left(۱ + \frac{۱}{k+۱}\right) \cdots \left(۱ + \frac{۱}{k+s}\right) = ۱ + \frac{s+۱}{k} \qquad (۱)$$

روشن است که عدد گویای $w - ۱$ را می‌توان به صورت $w - ۱ = \frac{m}{n}$ نشان داد که در آن m و n عددهای طبیعی هستند (اجباری نیست که نسبت بهم اول باشند) و $n > g$ است . حالا برای اینکه سمت راست

رابطهٔ(۱) مساوی w باشدکافی است $k=n$ و $s=m-۱$ گرفت . در چنین صورتی برای w تجزیهٔ مورد نظر بدست می‌آید .

۲۴۷* . ابتدا ثابت می‌کنیم‌که هر عددصحیح $k\geqslant ۰$ را می‌توان لااقل بیك طریق ، به‌صورت زیر نوشت :

$$k=\pm ۱^۲\pm ۲^۲\pm\cdots\pm m^۲ \qquad (۱)$$

که در آن m عددی طبیعی است وعلامت «$\pm$» می‌تواندبه وضع‌مناسبی اختیار شود . این رابطه برای ۰ صحیح است زیرا داریم :

$$۰=۱^۲+۲^۲-۳^۲+۴^۲-۵^۲-۶^۲+۷^۲$$

همچنین برای عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ هم داریم :

$$۱=۱^۲,\ ۲=-۱^۲-۲^۲-۳^۲+۴^۲,\ ۳=-۱^۲+۲^۲,$$
$$۴=-۱^۲-۲^۲+۳^۲$$

حالا کافی است ثابت کنیم‌که اگر رابطهٔ (۱) برای $k\geqslant ۰$صحیح باشد ، برای $k+۴$ هم صحیح است .

فرض می‌کنیم‌که قضیه‌برای عدد k صحیح باشد ، یعنی‌عدد طبیعی m وجود داشته باشد بطوریکه‌با انتخاب‌مناسب علامتهای «$\pm$»، رابطهٔ (۱) برقرار باشد . بسادگی می‌توان تحقیق کرد :

$$(m+۱)^۲-(m+۲)^۲-(m+۳)^۲+(m+۴)^۲=۴ \qquad (۲)$$

بنابراین از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$k+۴=\pm ۱^۲\pm ۲^۲\pm\cdots\pm m^۲+(m+۱)^۲-(m+۲)^۲-$$
$$-(m+۳)^۲+(m+۴)^۲$$

یعنی قضیهٔ مفروض برای $k+۴$ و بنابراین برای هرعددطبیعی k صحیح است .

حالامتذکر می‌شویم‌که ازاتحاد(۲) برای هرعدد طبیعیm، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$(m+۱)^۲-(m+۲)^۲-(m+۳)^۲+(m+۴)^۲-(m+۵)^۲+$$
$$+(m+۶)^۲+(m+۷)^۲-(m+۸)^۲=۰$$

یعنی می‌توان در رابطهٔ (۱) ، عدد m را به عدد $m+۸$ تغییر داد و بنابراین به عدد $m+۱۶$ و غیره . به این ترتیب هر عدد صحیح k را به بی‌نهایت طریق می‌توان به‌صورت (۱) نشان داد .

۲۴۸ . a) روشن‌است که معادلهٔ $۴x+۲=۰$ دارای ریشهٔ صحیح نیست. ولی همنهشتی $۴x+۲\equiv۰ (\mathrm{mod} p)$ برای هرمدول‌اول p دارای جواب است. برای مدول۲همنهشتی‌متحداً برقراراست و اگر p عدداول فردباشد: $p=۲k+۱$ (k عددی طبیعی‌است)، $x=k$ جواب همنهشتی است .

b) $m=a$ می‌گیریم ، چون همنهشتی $ax+b\equiv۰ (\mathrm{mod} m)$ جواب دارد باید b بر a قابل قسمت باشد ، بنابراین $b=ak$ می‌شود (k عددی صحیح‌است)ومعادلهٔ $ax+b=۰$ جواب $x=-k$ راخواهد داشت .

۲۴۹ . از $۶x^۲+۵x+۱=(۳x+۱)(۲x+۱)$ نتیجه‌می‌شود که معادلهٔ $۶x^۲+۵x+۱=۰$ جواب صحیح ندارد . m را عدد طبیعی دلخواهی فرض می‌کنیم‌و $m=۲^{\alpha}m_۱$ می‌گیریم ($\alpha\geqslant۰$ عددی صحیح و $m_۱$ عددی طبیعی وفرد است) . چون $(۲^{\alpha},m)=۱$ است، عددطبیعی

xوجود دارد بنحوی‌که $3x\equiv -1 (\mathrm{mod} 2^{\alpha})$ و $2x\equiv -1 (\mathrm{mod} m_1)$ باشد ، و از آنجا $m=2^{\alpha}m_1$ بر $(2x+1)(3x+1)$ قابل قسمت می‌شود و بنابراین داریم : $6x^2+5x+1\equiv 0 (\mathrm{mod} m)$.

a ۰ ۲۵۰) اگر q عددی اول غیراز ۳ و 2^p+1 بر q قابل‌قسمت باشد ، $2^{2p}-1$ بر q قابل قسمت می‌شود وداریم : $2^{2p}\equiv 1 (\mathrm{mod} q)$. فرض‌می‌کنیم δ نمای عدد ۲ نسبت به مدول q باشد . چون $2p$ بر δ قابل قسمت است ، δ مساوی یکی ازعددهای ۱ ، ۲ ، p یا $2p$ خواهد بود . ولی برای $\delta=1$ بدست می‌آید : $2\equiv 1 (\mathrm{mod} q)$ که ممکن نیست ؛ برای $\delta=2$ بدست می‌آید : $2^2\equiv 1 (\mathrm{mod} q)$ که از آنجا $q=3$ می‌شودکه برخلاف فرض است ؛ برای $\delta=p$ باید 2^p-1 بر q قابل قسمت باشد و چون 2^p+1 بر q قابل قسمت است باید ۲ بر q قابل قسمت باشد که ممکن نیست ، زیرا 2^p+1 بر q قابل قسمت و q عددی فرداست. به‌این ترتیب $\delta=2p$ می‌شود و چون $q-1$ بر δ قابل‌قسمت‌است، $q-1$ بر p ۲ قابل‌قسمت‌می‌شود وازآنجا $q=2kp+1$ می‌شود که در آن k عددی است طبیعی .

جالب است قضیه‌ای راکه ثابت کردیم با این قضیه مقایسه کنیم که‌بر طبق آن : اگر p عددی اول‌و بزرگتر از۲ باشد ، هر مقسوم‌علیه عدد 2^p-1 به‌صورت $2kp+1$ است که در آن k عددی صحیح‌است.

b) اثبات از تساوی زیر بدست می‌آید :

$$t_{n^2}+t_{n^2+1}=(n^2-1)^2+(2n)^2 \qquad (n=2,3,\dots)$$

c) مثلا عددهای $t_{8k}+t_2=4k(8k+1)+3$ از این قبیل‌اند $(k=1,2,\dots)$ ، زیرا این عددها در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی

۳ می‌دهند و بنابراین نمی‌توانند مساوی مجموع مربعهای دوعددطبیعی باشند .

d)مثلاعددهای $(۹t+۷)^۲+۱^۲$ ازاین‌قبیل‌اند$(t=۰,۱,۲,\dots)$ زیرا همهٔ این عددهابه‌صورت $۹k+۵$ هستند (k عددی طبیعی است). در حقیقت اگر $۹k+۵=t_x+t_y$ باشد ، باید داشته باشیم :

$$۸(۹k+۵)+۲=(۲x+۱)^۲+(۲y+۱)^۲$$

که در آن xوy عددهائی طبیعی هستند. ولی در تقسیم مجذور یك عدد فرد بر۹ یکی ازباقیمانده‌های ۰ ، ۱ ، ۴ یا ۷ بدست می‌آید، بنابراین وقتی‌که مجموع دو مربع‌کامل را بر ۹ تقسیم کنیم هـرگز باقیمانده‌ای مساوی۶بدست‌نمی‌آید،درحالیکه $۸(۹k+۵)+۲=۹(۸k+۴)+۶$ است .

e) مثلا عددهای $۳۶k+۱۵(k=۰,۱,\dots)$ ازاینگونه‌اند،زیرا در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای مساوی۶ می‌دهند ودرتقسیم بر۴ باقیمانده‌ای مساوی ۳ .

f) حل آ . شینتسل :

در سال ۱۹۴۲ گ. لیونگرن ثابت کرد که معادلهٔ $z^۲+۱=۲y^۴$ تنها دو جواب برای عددهای طبیعی yوz دارد: $y=z=۱$ و $y=۱۳$ $z=۲۳۹$. از این معادله نتیجه مـی‌شود کـه z عـددی فـرد است : $z=۲x+۱$که اگر قرار دهیم به معادلهٔ $y^۴=(x+۱)^۲+x^۲$می‌رسیم. بنابراین معادلهٔمفروض‌مسئله برای عددهای طبیعی xوy تنها یك‌جواب دارد : $x=۱۱۹$ ، $y=۱۳$ [۱۵] .

۱ . یادداشتهای مترجم[1]

۱ (صفحهٔ ۳۶) . ریاضی‌دانهای قدیم می‌توانستند این قضیه را ثابت کنند که سلسلهٔ عددهای اول بی‌پایان است، یعنی قضیهٔ وجود مجموعهٔ نامحدود عددهای اول را در تصاعد حسابی $۲x+۱$ ($x=۱,۳,۰۰۰$) می‌دانستند. بعدها استدلال مشهور اقلیدس («مقدمات» ، کتاب IX ، حکم ۲۰) را برای اثبات قضیهٔ مشابه آن دربارهٔ عددهای اول در تصاعدهای به صورتهای خاص $۴x-۱$ ، $۶x-۱$ و غیره بکار بردند .

---

۱) منظور، **ملنیکوو** مترجم روسی کتاب است

کشف قضیهٔ کلی دربارهٔ نامحدود بودن تعدادعددهای اول درتصاعدحسابی $ax+b$ ، که‌درآن $(a,b)=1$ و $x=1,2,3,\ldots$ است، متعلق‌به **لژاندر**[1] است. لژاندر مقالهٔ خود را ،که شامل این قضیه بود ، در ۱۷۷۸ نوشت . اثبات قضیهٔ لژاندر درچاپ دوم کتاب او « Essai sur la theorie des nombres » (پاریس ۱۸۰۸) آمده است . ولی این اثبات اشتباه بود.

اولین‌اثبات قضیهٔ لژاندر را **دیریکله** پیدا کرد و در۱۸۳۷منتشرکرد . کار دیریکله درمورد روشن کردن این قضیه ، نقش اساسی در تکامل نظریهٔ تحلیلی اعداد (که شروع آنرا **اولر** پایه‌گذاری کرده بود) ، بازی‌کرد.

قضیه‌ای‌که‌بوسیلهٔ لژاندر کشف شد. بحق نام دیریکله را بخودگرفت. قضیهٔ دیریکله یکی از مهمترین قضایای نظریهٔ اعداد است . خود دیریکله این قضیه را برای اعداد صحیح مختلط بسط داد . بعدها کوششهای زیادی انجام‌گرفت‌تا قضیهٔ دیریکله را باروشهای مقدماتی‌تر اثبات‌کنند. **آ. سلبرگ**، **گ . شاپیرو** و دیگران دراین زمینه موفقیتهائی بدست آورند .

طبق قضیهٔ دیریکله ، کثیرالجملهٔ صحیح درجه اول $ax+b$ (که در آن $(a,b)=1$ است و x می‌تواند همهٔ مقادیر صحیح را اختیار کند) ، مجموعهٔ نامحدودی از عددهای اول را می‌دهد . آیا کثیرالجمله‌های صحیح (ویا کثیرالجمله‌های باضرایب گویا) ، وقتی‌که از درجهٔ دوم ویا درجه‌های بالاتر باشند ، دارای چنین خاصیتی هستند ؟ اگر چه این سئوال مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانها قرارگرفته‌است، ولی تاکنون راه حلی برای آن پیدا نشده است .

معلوم است که دراین مسئله ، کثیرالجملهٔ صحیح $f(x)$ باید دارای این‌خواص باشد: ۱) ضرایب‌آن‌نسبت بهم‌اول باشد (یعنی مقسوم‌علیه مشترکی نداشته‌باشند) و ۲) درهیئت اعدادگویا غیر قابل تحویل باشد (یعنی‌به‌صورت حاصلضرب دوکثیرالجمله با ضرایب گویا ، که درجهٔ آنها کمتر از درجهٔ

---

۲) **گ . ویلیتنر** درکتاب«تاریخ ریاضیات ازدکارت تا اواسط‌قرن‌نوزدهم» خود (مسکو ، ۱۹۶۰ ، صفحهٔ ۸۱) ، کشف این قضیه را به اولر نسبت‌می‌دهد. ولی اولر تنها دربارهٔ نامحدود بودن تعداد عددهای اول در تصاعدهای حسابی $4x+1$ ، $4x-1$ ، $100x+1$ و شبیه آنها بحث می‌کند که طبعاً درحالت تعمیم به‌صورت $mx+1$ و $mx-1$ درمی‌آیند.

$f(x)$ استدرنیاید). باوجود این می‌توان بسادگی ثابت‌کرد کثیرالجمله‌هائی با درجهٔ بالاتر از واحد وجود داردکه این دوشرط درموردآن صدق می‌کند ولی هیچ عدد اولی بدست نمی‌دهد . مثلا کثیرالجملهٔ غیر قابل تحویل

(۱)

$$f(x)=x^3+3x^2+8x+18=6\left[\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}+x+3\right]$$

تنها عددهائی‌را می‌دهدکه مضرب ۶ هستند .

درسال۱۸۵۷ ، **و . یا . بونیاکوسکی** این فرضیه را تنظیم‌کرد : اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای باضرایبی نسبت بهم اول ودرهیئت اعداد گویا غیرقابل تحویل باشد ، و N بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك مقادیر آن به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح x باشد ، دراینصورت کثیرالجملهٔ $\frac{f(x)}{N}$ مجموعهٔ نامحدودی ازعددهای اول (وقتی‌که x مقادیر صحیح را اختیار می‌کند) بدست می‌دهد.

در مورد کثیرالجملهٔ (۱) واضح است که $N\geqslant 6$ است . ولی چون $f(0)=18$ و $f(1)=30$ است ، روشن است که N از ۶ تجاوز نمی‌کند. بنابراین $N=6$. بنابراین طبق فرضیهٔ بونیاکوسکی مقادیر کثیرالجملهٔ

$$\frac{f(x)}{6}=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x+3$$

وقتی x همهٔ مقادیر صحیح را اختیار کند ، شامل بی‌نهایت عدد اول‌است.

بجز قضیهٔ دیریکله ، حتی یك نشانهٔ دیگر وجود نداردکه فرضیهٔ بونیاکوسکی را تأیید کند . هنوز به این سؤال مورد علاقهٔ اولر جواب‌داده نشده است‌که : آیا تعداد عددهای اولی‌که ازکثیرالجملهٔ x^2+1 ، به‌ازای همهٔ مقادیر طبیعی x بدست می‌آید ، محدود است یا نامحدود ؟ فرضیهٔ بونیاکوسکی و بسیاری از فرضیه‌ها و قضیه‌های دیگر نظریهٔ اعداد نتیجه‌ای از یك فرضیهٔ کلی است که دراین اواخر بوسیلهٔ **آ. شینتسل** مطرح شده‌است.

مدتهاست که ریاضی‌دانها به این سئوال هم‌علاقمندندکه کوچکترین‌عدد اول درتصاعد حسابی کدام است . در ۱۹۴۴ **یو . و . لینیك** نتیجهٔ جالب و

مهمی دراین زمینه بدست آورد. لینیك ثابت کردکه عدد ثابت C وجوددارد بنحوی‌که اگر $(a , b)=۱$ و $۱\leqslant b<a$ باشد ، تصاعد حسابی

$$a , a+b , ۲a+b , \cdots$$

شامل‌عدد اولی‌است‌که از a^c کوچکتراست. **چن‌تسه زین‌رون** در ۱۹۶۵ ثابت کردکه عدد ثابت لینیك C از ۷۷ تجاوز نمی‌کند.

۲ (صفحهٔ ۴۱) . در سال ۱۸۴۵ **ژوزف برتران** ریاضی‌دان مشهور فرانسوی ، برای حل مسئله‌ای ازنظریهٔ گروهها ، ازحکمی استفاده کرد که طبق آن : به‌ازای هرعدد صحیح $n>۷$ بین $\frac{n}{۲}$ و $n-۲$ همیشه عددی اول وجود دارد . اواین حکم را به کمك جدول عددهای اول $n<۶.۱۰^۶$ مورد تحقیق قرار داد . برتران نتوانست حکم مورد نظر خود را ثابت کند و بنابراین آنرا به‌عنوان یك اصل پذیرفت .

معلوم است‌که اصل برتران را می‌توان به‌صورت زیر تنظیم کرد : **به‌ازای هرعدد صحیح $n>۳$ بین n و $۲n-۲$ لااقل یك عدد اول وجود دارد**[۱]. اصل برتران، به‌صورت اخیر، برای نخستین‌بار به‌وسیلهٔ **پ. ل. چبیشف** دراثر او «Memoire sur les nombres premiers» درسال ۱۸۵۰ ثابت شد. این اثرکلاسیك ریاضی‌دان بزرگ، با جمله‌های زیرشروع می‌شود.

«همهٔ سئوالهای مربوط به قانون پراکندگی عددهای اول در رشتهٔ

$$۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,\cdots$$

بطور کلی بسیار مشکل‌اند . آن نتایجی را هم که می‌توان بااحتمال زیاد براساس جدول عددهای اول نتیجه گرفت ، اغلب بدون اثبات دقیق باقی مانده‌است . مثلا جدول عددهای اول این فکر را تلقین می‌کند که با شروع از $a<۳$ ، همیشه عددی اول بزرگتر از a و کوچکتراز $۲a-۲$ وجود دارد ، همان چیزی‌که اصل برتران راتشکیل

---

۱) از این حکم نتیجه می‌شود که برای عددهای طبیعی $n>۲$ بین n و $۲n$ لااقل یك عدد اول وجود دارد ، حکم اخیر را هم گاهی اصل برتران می‌نامند. تنظیم اصل برتران به‌اینصورت ، در این اواخر در یکی از یادداشتهای اولر پیدا شده است :

می‌دهد ، ولی تاکنون این حکم برای مقادیری از a که خارج از حدود جدولهای ما باشد ، ثابت نشده است . بخصوص ، وقتی که با حدود تنگ‌تری سروکار داشته باشیم ، این اشکال زیادترمی‌شود...».

ارزش اثباتی‌که چبیشف برای اصل نرتران پیداکرد ، بخودی خود معلوم است . ولی باز هم دراینجا لازم است از ارزش روشهائی که چبیشف برای حل مشکلترین مسائل‌مربوط به قانون پراکندگی عددهای اول ،مورد استفاده قراردادگفتگو کنیم . روشهای‌جدید چبیشف، درمقام مقایسه‌باروشهای مقدماتی. اثرفوق‌العاده روی ریاضی‌دانها گذاشت . **سه‌ره** ریاضی‌دان‌فرانسوی یادداشت چبیشف «دربارهٔعددهای اول» را درجلد دوم دورهٔ «جبرعالی»خود نقل کرده ومی‌نویسد : «من زاید می‌دانم‌که دراینجا تحلیل پرنبوغ چبیشف را معرفی کنم ، تحلیلی‌که متکی بر ملاحظات و افکار کاملا جدید است» . **سیلوستر** ریاضی‌دان مشهور انگلیسی یادداشت خود را درسال ۱۸۸۱ بااین کلمات تمام می‌کند : «برای‌اینکه بطور دقیق دربارهٔ وجود امکان مشابهی بحث شود ، باید تا زمانی انتظار کشید که کسی پا به عرصهٔ وجود بگذاردکه همانند چبیشف ازنظر دید عمومی و فراست‌درسطحی بمراتب بالاتر ازمیزان عادی جامعهٔ بشری باشد» .

اثبات چبیشف‌برقضیه‌ای تکیه داردکه بوسیلهٔ خوداوثابت شده وبرطبق آن به‌ازای هر $\varepsilon > \frac{1}{5}$ ، عددطبیعی $n = n_0(\varepsilon)$ وجود دارد، بنحوی‌که برای $n > n_0$ بین n و $n(\varepsilon+1)$ (با به‌حساب آوردن خود عدداخیر) لااقل‌یك عدد اول وجود دارد .

اصل برتران وقضیهٔ چبیشف بررسیهای زیادی را بخود اختصاص داد. درسال ۱۹۲۹ **ای . شور** ثابت‌کرد که حد n_0 را در قضیهٔ چبیشف می‌توان معین کرد و برای $\varepsilon = \frac{1}{4}$ پیدا کرد : $n_0\left(\frac{1}{4}\right) = ۲۴$ ، سه سال بعد نتیجهٔ **شور** بوسیلهٔ **ر . برودش** دقیق‌تر شد ؛ او (به کمك دستگاه تحلیلی بغرنجی) پیدا کرد که $n_0\left(\frac{1}{8}\right) = ۴۸$. در حال حاضر بهترین نتیجه

دربارهٔ قضیهٔ چبیشف متعلق به **هـ. روربـاخ و ژ. ویس** است که با روشهای مقدماتی و به کمك توابع چبیشف $\theta(x)$ و $\psi(x)$ ثابت کرده‌اند که $n_0\left(\frac{1}{۱۳}\right)=۱۱۸$ وحتی بااشکال بیشتری ثابت‌کرده‌اندکه $n_0(۰,۰۷۳)<۱۱۹$ است.

۳ (صفحهٔ ۵۰). قضیه اولر، که طبق آن معادلهٔ

$$۴xy-x-y=z^۲ \qquad (۱)$$

برای عددهای طبیعی x، y و z جواب ندارد، برای نخستین بار در نامهٔ **اولر** به **گولدباخ** در ۹ سپتامبر ۱۷۴۱ ذکرشده است. اولر دراین‌نامه‌ضمن تاییدصحت قضیهٔ‌گولدباخ‌که طبق‌آن $۳n^۲+۲(۳m+۳$ به‌ازای‌مقادیرصحیح m و n نمی‌تواند مجذور کامل باشد، متذکر می‌شود که مدتهاست به‌نتیجهٔ مشابهی رسیده‌است‌واین قضیه‌را پیدا کرده است‌که عددهای $۴mn-m-۱$ و $۴mn-m-n$ به ازای عددهای صحیح و مثبت m و n نمی‌توانند مجذور کامل باشند.

این دوقضیه وقضایای مشابه آنها، مدت زیادی موضوع بحث اولر و گولدباخ بود. اولر می‌دیدکه عدم امکان تساوی

$$۴mn-m-۱=a^۲ \qquad (۲)$$

ویا تساوی معادل آن

$$(۴n-۱)m=a^۲+۱ \qquad (۳)$$

به‌ازای عددهای طبیعی m، n و a نتیجه‌ای از قضیهٔ فرما است: هیچ عدد اولی به‌صورت $۴k-۱$ نمی‌تواند مقسوم علیهی از مجموع مربعهای دو عدد نسبت بهم اول، باشد. اولر اثبات این قضیهٔ فرما را پیدا کرد وآنرادرنامهٔ ۶ مارس ۱۷۴۲ به گولدباخ‌اطلاع داد (برای این اثبات [۵] را هم‌ببینید).

از قضیهٔ فرماعدم‌امکان تساوی $(۴m-۱)(۴n-۱)=(۲a)^۲+۱$ وبنابراین عدم امکان تساوی $۴mn-m-n=a^۲$ را هم می‌توان نتیجه گرفت.

ولی هم اولرو هم‌گولدباخ اعتقاد داشتندکه این دوقضیه را می‌توان‌با

روشهای ساده‌تری حل کرد ومصرانه استدلالهای جدیدی را جستجومی‌کردند. دراین جستجو گولدباخ با فعالیت بیشتری تلاش می‌کرد. اگرچه استدلال او درابتدا مفصل وپیچیده بود وحتی همراه با اشتباهاتی بود ، بالاخره موفق شد اثبات بسیار ساده و زیبائی ازقضیهٔ اولر پیداکند که طبق آن معادلهٔ

$$۴xy-x-۱=z^۲ \qquad (۴)$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد . دراینجا اثبات او را ، با بعضی تغییرات جزئی وغیر اساسی ، می‌آوریم .

فرض‌کنیدمعادلهٔ (۴) برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب داشته باشد و a را کوچکترین مقدار طبیعی z می‌گیریم که در معادلهٔ (۴) صدق کند ، بنحوی که رابطهٔ (۲) برقرار باشد (m و n دراین رابطه عددهای طبیعی هستند) . به‌دوطرف تساوی (۲) عبارت $-۴ma+۴m^۲$ را اضافه می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۴m(n-a+m)-m-۱=(a-۲m)^۲ \qquad (۵)$$

حالا به‌سادگی ثابت می‌شودکه

$$a<m \qquad (۶)$$

درحقیقت حالت $a=m$ ممکن نیست ، زیرا دراینصورت سمت راست‌تساوی (۲) بر m قابل قسمت و سمت چپ آن بر m غیرقابل قسمت است . در حالتی هم که $a>m$ باشد ، باید داشته باشیم : $n-a+m<n$ ،یعنی سمت چپ تساوی (۵) کوچکتراز سمت چپ تساوی (۲) می‌شود و بنابراین به نامساوی $a^۲>(a-۲m)^۲$ می‌رسیم‌که بنابرتعریف عدد a ممکن‌نیست.

ثابت می‌کنیم که

$$۴n-۱>۲a \qquad (۷)$$

به دوطرف تساوی (۲) عبارت $-۲a(۴n-۱)+(۴n-۱)^۲$ را اضافه می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$(۴n-۱)(m-۲a+۴n-۱)-۱=[a-(۴n-۱)]^۲ \ ,$$

بنابراین، با توجه به تعریف عدد a ، به نامساوی $a^۲<[a-(۴n-۱)]^۲$ می‌رسیم که ازآن بلافاصله نامساوی (۷) نتیجه می‌شود .

بادرنظرگرفتن (۲) ، (۶) و (۷) بدست می‌آید :

$$a^2+1=(4n-1)m>2a.a=2a^2$$

واز آنجا $a^2<1$ می‌شودکه ممکن نیست . قضیه ثابت شد .

این اثبات نمونهٔ خوبی از استدلال خالص حسابی است . اولر باشادی در نامهٔ ۱۵ اکتبر ۱۷۴۳ خود می‌نویسد : «باید اعتراف کنم‌که من انتظار نداشتم‌که بشود این قضیه را باروشی به این سادگی و زیبائی اثبات کرد . من مطمئن هستم که بسیاری از قضایای فرما را می‌توان با راههائی از این نوع اثبات کرد و بنابراین من خود را خیلی مدیون شما می‌دانم که چنین استدلال عالی وقشنگی را طرح کردید» . اولر در همین‌نامه ثابت کرد روش گولدباخ را برای قضیهٔ مربوط به معادلهٔ (۱) هم می‌توان بکار برد .

اثبات اولر چنین است .

فرض می‌کنیم معادلهٔ (۱) برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب داشته باشد و a را کوچکترین مقدار طبیعی z می‌گیریم که دراین معادله صدق کند ، بنحوی که تساوی زیر برقرار باشد :

$$4mn-m-n=a^2 \qquad (8)$$

که درآن m و n عددهائی طبیعی هستند .

طرفین معادلهٔ (۸) را در ۴ ضرب می‌کنیم ، بصورت زیر درمی‌آید :

$$(4m-1)(4n-1)-1=4a^2 \qquad (9)$$

عبارت $-8a(4n-1)+4(4n-1)^2$ را به‌طرفین تساوی (۹) اضافه می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$[4m-1-8a+4(4n-1)](4n-1)-1= \qquad (10)$$
$$=4(a-4n+1)^2$$

تساوی (۱۰) شبیه تساوی (۹) است وبنابراین جواب جدیدی برای معادلهٔ (۱) با $z=2|a-4n+1|$ بدست می‌دهد .

با توجه به تعریف عدد a داریم :

$$[4m-1-8a+4(4n-1)](4n-1)>(4m-1)(4n-1)$$

وازآنجا $4n-1>2a$.

چون تساوی (۸) نسبت به m و n متقادن است ، باعملیاتی شبیه آنچه گذشت بدست می‌آید : $4m-1>2a$.

فرض‌می‌کنیم $4m-1=2a+p$ و $4n-1=2a+q$ ، که در آنها q و p عددهائی‌طبیعی هستند . دراینصورت داریم:

$$(4m-1)(4n-1)=4a^2+2a(p+q)+pq$$

ازآنجا ، باتوجه به(۹) ، $2a(p+q)+pq=1$ بدست‌می‌آید ، که عدم امکان‌آن‌برای عددهای طبیعی a و pو q واضح‌است . واین‌تناقض قضیه‌را ثابت می‌کند .

علاقهٔ اولر به معادلهٔ (۱) تصادفی نبود. این معادله با تحقیقی‌که اولر دربارهٔ مقسوم‌علیه‌های خطی صورتهای مربعی مـی‌کرد ارتباط داشت و همین تحقیق منجر به‌کشف قضیهٔ مهمی در نظریهٔ اعداد شد : قانون تقابل مربعی .

۴ (صفحهٔ ۵۷) دنبالهٔ عددی $\{a_n\}$ رامتناوب‌گویند، وقتی‌که عددهای طبیعی k و l وجود داشته باشند بنحوی که برای هـر عدد $n\geqslant k$ تساوی $a_{n+l}=a_n$ برقرار باشد . اگر l کوچکترین عدد طبیعی باشد که در این شرط صدق‌کند ،گویند دنبالهٔ $\{a_n\}$ تناوب n جمله‌ای دارد . وقتی تناوب را خالص گویند که هر l جملهٔ اول دنباله متعلق به تناوب باشد . بنابراین تناوب خالص تنها به‌ازای $k=1$ بدست می‌آید .

۵ (صفحهٔ ۶۹) . قریب ۵۰۰ سال قبل از میلاد ، چینی‌ها با حالت خاصی از قضیهٔ فرما آشنا بودند : اگر n عددی اول و فرد باشد $2^{n-1}-1$ بر n قابل قسمت است . ولی چینی‌ها به‌اشتباه تصور می‌کردندکه عکس این قضیه هم صحیح‌است : اگر $2^{n-1}-1$ بر n قابل‌قسمت باشد ، n نمی‌تواند عددی مرکب باشد . این حکم‌ها را ظاهراً بر اساس استقراء تجربی بدست آورده بودند . در اروپا تنها در آخرقرن نونزدهم به‌منشاءچینی این‌قضیه‌ها پی‌بردند .

روشن‌است‌که این‌اشتباه «قضیهٔ چینی» ، می‌توانست در اروپاهم بوجود آید . **د . مانکه** با مطالعهٔ اثری ازلایپنیتس ، متذکرمی‌شودکه لایپنیتس‌این « قضیهٔ چینی » راکشف و حتی راه اثبات‌آنرا پیداکرد (اشتباه این استدلال را بسادگی می‌توان پیداکرد) .

اشتباه «قضیهٔ چینی» برای نخستین بار درسال ۱۸۳۰ ثابت شد. دراین سال یك مولف ناشناس در مقاله‌ای که در شمارهٔ ششم مجلهٔ کِرِل چاپ شد، ثابت کرد: $۲^{۳۴۰} - ۱ \equiv ۰ \pmod{۳۴۱}$.

نویسندهٔ این سطور طرفدار این عقیده است که حکم غلط فرما دربارهٔ اول بودن عددهای $F_n = ۲^{۲^n} + ۱ \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$، ناشی از استقراء تجربی است. فرما دیدکه وقتی n مساوی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، F_n بترتیب مساوی ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ می‌شودکه عددهائی اول هستند پیداکردن عددهای بعدی F_n کار مشکلی بود. فرما درسالهائی که از ۱۶۴۰ شروع می‌شود بطور پیگیر به‌دنبال اثبات قضیهٔ غلط خود بود در سال ۱۶۵۹ در نامه‌ای که به **کارکاوی** نوشته است متذکر می‌شود که قضیهٔ مربوط به عددهای اول F_n را می‌توان با روش نزول لایتناهی ثابت کرد.

اگر قبول کنیم که فرما می‌توانسته است قضایای حسابی خود را ثابت کند، باید این مطلب را بپذیریم که دربارهٔ قضیهٔ غلط خود براساس روش نزول، استدلال نادرستی کرده است. ولی توضیح **باناخه‌ویچ** از روش نزول استفاده نمی‌کند. به‌اعتقاد باناخه‌ویچ، فرما باید از «قضیهٔ چینی» استفاده کرده باشد، که ممکن است آنرا به‌عنوان یك اصل پذیرفته باشد. بنظر باناخه‌ویچ، چنین استدلالی وجودداشته است که حکم مربوط به‌عددهای F_n را در نظر فرما صحیح نشان داده است.

در اثرهائی که از فرما باقی مانده است (و تاکنون پیدا شده)، هیچ اشاره‌ای به «قضیهٔ چینی» نشده است. از این گذشته، می‌توان ثابت کرد که فرما از این قضیه استفاده نکرده است. فرما به‌عددهائی که بصورت $۲^n - ۱$ بودند $(n = ۱, ۲, \ldots)$ علاقمند شد. در دو نامه‌ای که فرما در سال ۱۶۴۰ نوشته است متذکر می‌شود که اگر n عددی مرکب باشد، $۲^n - ۱$ هم مرکب است، اگر n عددی اول[۱] باشد، $۲^n - ۲$ بر $۲n$ قابل قسمت است و بالاخره مقسوم‌علیه‌های اول $۲^n - ۱$ باید بصورت $۲kn + ۱$ باشند؛ مثلا $۲۳۰۸۹ = ۱ - ۲^{۱۱}$ است یا $۱ - ۲^{۳۷}$ بر ۲۲۳ و $۱ - ۲^{۲۳}$ بر ۴۷ قابل

۱) باید گفت: عدد اول فرد.

قسمت‌اند . بنابراین غلط بودن این حکم برای فرما روشن بوده است که : اگر n عددی اول باشد ، $۲^n - ۱$ هم عددی اول است. ولی این حکم را می‌توان نتیجه‌ای از «قضیهٔ چینی» دانست . درحقیقت اگر n عددی اول باشد $۲^n - ۲$ بر n قابل قسمت است و بنابراین $۲^{۲^n - ۱} - ۲$ بر $۲^{۲^n - ۲} - ۱$ و عدد اخیر بر $۲^n - ۱$ قابل قسمت است و از آنجا طبق قضیهٔ چینی ، $۲^n - ۱$ عددی است اول .

توضیح باناخه‌ویچ قانع‌کننده نیست، با این نتیجه‌گیری او هم نمی‌توان موافقت کرد که « اشتباه کاهنهای چینی با شکل تغییر یافته‌ای ، بصورت قضیهٔ غلط فرما ، در اروپا تکرار شد» . این دو حکم هم‌ارز نیستند (به‌این معنا که از قضیهٔ غلط فرما نمی‌شود « قضیهٔ چینی» را نتیجه گرفت) .

باناخه‌ویچ می‌گوید که فرما می‌دانست که مقسوم‌علیه‌های F_n را باید فقط بین عددهائی که بصورت $k \cdot ۲^{n+۱} + ۱$ هستند (k عددی طبیعی است) جستجو کرد و بنابراین فرما می‌توانست امکان قابل‌قسمت بودن F_n را بر بسیاری از عددهای اول استثنا کند . ولی این هم قانع‌کننده نیست . نمی‌شود چیزی را به فرما منسوب کرد که می‌توانست در فکر او باشد . فرما می‌دانست که هیچ عدد اول بصورت $۴k - ۱$ نمی‌تواند مقسوم‌علیه مجموع مربعهای دو عدد متباین (نسبت بهم اول) باشد و بنابراین مقسوم‌علیه‌های اول F_n باید بصورت $۴k + ۱$ باشند . دقت بیشتر در شکل مقسوم‌علیه‌های F_n را اولر انجام داد .

استدلال اولر را بطور خلاصه در اینجا می‌آوریم . p را عددی اول و فرد می‌گیریم و فرض می‌کنیم هیچیك از دو عدد a و b بر p قابل قسمت نباشند . طبق قضیهٔ کوچك فرما $a^{p-۱} - b^{p-۱}$ بر p قابل قسمت و از آنجا $a^{p-۱} + b^{p-۱} = (a^{p-۱} - b^{p-۱}) + ۲b^{p-۱}$ بر p غیر قابل قسمت است . بنابراین اگر $p = ۴k - ۱$ باشد ، عدد

$$a^{۴k-۲} + b^{۴k-۲} = (a^۲ + b^۲)(a^{۴k-۴} - a^{۴k-۶}b^۲ + \dots)$$

بر p غیر قابل قسمت و در نتیجه $a^۲ + b^۲$ بر p غیر قابل قسمت می‌شود . اولر ضمن اثبات قضیهٔ فرما ، جلوتر هم رفت . او متذکر می‌شود که برای دو

عدد a و b کـه نسبت بهم اول بـاشند ، مقسوم‌علیه‌های فـرد مجموع $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$ تنهامی‌توانند بصورت $4k+1$ ، یعنی‌یابصورت $8k+1$ ویا بصورت $8k-3$ باشند . اگر $p=8k-3$ عددی اول باشد، a^4+b^4 ودرنتیجه $a^{8k-4}+b^{8k-4}=(a^4)^{2k-1}+(b^4)^{2k-1}$ بر p غیرقابل‌قسمت می‌شود. به‌این ترتیب مقسوم‌علیه‌های فرد و اول‌مجموع توانهای چهارم دو عددی‌که نسبت بهم‌اولند تنها می‌توانند بصورت $8k+1$ باشند . بهمین ترتیب ثابت می‌شود که مقسوم‌علیه‌های فـرد و اول مجموع a^8+b^8 باید بصورت $16k+1$ باشند و بطورکلی اگر $(a,b)=1$ باشد مقسوم علیه‌های فرد و اول مجموع $a^{2^n}+b^{2^n}$ باید بصورت $2^{n+1}.k+1$ باشند .

در طول یك ربع قرن فرما از قضیهٔ مورد علاقه‌اش دربارهٔ‌عددهای اول F_n جدا نشده بود . اولرکه در ابتدا کوشش می‌کرد این قضیه را ثابت‌کند، نادرست بودن آنرا در سال ۱۷۳۲ ثابت‌کرد ونشان داد که F_5 عددی است مرکب . اگر فرما می‌دانست که مقسوم‌علیه‌های F_5 باید بصورت $64k+1$ باشند ، با آزمایش عددهای اول ۱۹۳ ، ۲۵۷ ، ۴۴۹ ، ۵۷۷ ، ۶۴۱ ، یعنی بعد از پنج آزمایش ، متوجه می‌شدکه F_5 بر ۶۴۱ قابل قسمت است .

عدم موفقیت فرما در مورد عددهای F_n ، وهمچنین اشتباهات دیگری که در بعضی احکام‌کرده است ، این فکررابوجود می‌آوردکه فرما نتوانسته بود بسیاری از قضایائی را که از طریق مشاهده بدست آورده بود،ثابت‌کند.

۶ (صفحهٔ ۸۶) . بعضی از اطلاعات مربوط به عددهای اول نما را می‌توانید درکتاب و . سرپینسکی بنام « آنچه دربارهٔ عددهای اول‌می‌دانیم» پیداکنید (صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸) .

۷ (صفحهٔ ۹۷) . قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها درفصل سوم ازکتاب سرپینسکی « دربارهٔ جوابهای صحیح معادلات» آمده است. ما دراینجاصورت این قضیه‌را می‌آوریم . اگر $m\geqslant 2$ عددی‌طبیعی و $a_1, a_2, \ldots, a_m$ عددهای طبیعی و دو به دو نسبت بهم اول‌و $r_1, r_2, \ldots, r_m$ عددهای صحیح دلخواهی باشند ، عددهای صحیح $x_1, x_2, \ldots, x_m$ وجود دارد بنحوی که در دستگاه

معادله‌های زیر صدق‌کنند :

$$a_1x_1+r_1=a_2x_2+r_2=\cdots=a_mx_m+r_m$$

چینی‌ها از زمانی که از قرن سوم تجاوز نمی‌کند ، عملا از این قضیه استفاده می‌کردند ، ولی در اروپا تنها در اواسط قرن نوزدهم به‌این مطلب پی‌بردند . بنابراین نامگذاری «قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها» نمی‌تواند مربوط به قبل از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم باشد . در زمانهای مختلف ودرکشورهای مختلف از این قضیه برای حل مسائل حسابی استفاده می‌کردند [۱].

اولر مقالهٔ سوم کتاب خود را بنام «حل مسائل حساب دربارهٔ پیداکردن عددهائی که در تقسیم برعددهای مفروض ، باقیمانده‌های مفروض را بدهند» به قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها اختصاص داده است . در حل مسائل مقالهٔ مذکور ، اولر به حل دستگاه معادلات خطی‌که تعداد آنها یکی‌کمتراز تعداد مجهولات باشد ، می‌رسد. گوس حل این مسائل را در «بررسیهای حسابی» خود منجر به حل دستگاه همنهشتیهای درجه اول می‌کند . ولی روش گوس ، در اساس‌همان روشی‌است‌که مورد استفادهٔ اولر بود .

۸(صفحهٔ ۱۵۸). اخیراً نتیجه کاملا کلی‌تری بدست آمده است . ثابت شده است که برای هر عدد طبیعی a ، تصاعد عددی Q وجود دارد کـه از بی‌نهایت عدد طبیعی تشکیل شده باشد ، بنحوی که عدد ka^n+1 فرد و به‌ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد k از تصاعد Q ، عددی مرکب باشد.[۲]

۹ (صفحهٔ ۱۶۹) . نظریهٔ معادلات دیوفانتی راگاهی تحلیل‌دیوفانتی هم‌گویند . در تحلیل دیوفانتی، معادلات و یا دستگاه معادلاتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد (و اگر با معادلات‌جبری سروکار داشته باشیم حتماً با ضرایب صحیح) که باید جوابهای آنها رابصورتی معین بدست‌آورد : مثلاجوابهائی که‌گویا ، صحیح ، طبیعی ، مثلثی ویا اول باشند . درمسائل‌تحلیل دیوفانتی

---

۱) L.E.Dickson,History of the theory of numbers, T.2. Washington,1620, (صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴)

۲) R.Bowen.the sequence ka^n+1 Composite for all n,American Math. Monthly 71,1964(صفحه‌های۱۷۵-۱۷۶)

معمولا تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است و بهمین مناسبت درچنین وضعی معادلات سیال نامیده می‌شوند .

از زمانی‌که شروع آن از اعماق‌تاریخ قدیم‌سرچشمه می‌گیرد، معادلات سیال جلب نظر ریاضی‌دانها راکرده بود . امروز دیگر روشن‌شده است‌که‌در حدود ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد ، ریاضی‌دانهای بابل می‌توانستند معادلهٔ به‌اصطلاح فیثاغورثی $x^2+y^2=z^2$ را برای جوابهای گویا ، یعنی با در نظرگرفتن تجانس معادله ، برای جوابهای صحیح حل‌کنند .

قسمت بزرگی از همهٔ تحقیقات مربوط به نظریهٔاعدادرامی‌توان‌مربوط به‌تحلیل دیوفانتی دانست . به‌عنوان مثال مسئلهٔ مربوط به تبدیل عدد صحیح و مفروض m بصورت $ax^2+bxy+cy^2$ ، منجر به مطالعهٔ معادلهٔ سیال $ax^2+bxy+cy^2=m$، یعنی منجر بیك تحلیل‌دیوفانتی می‌شود. بسیاری از مسائل مربوط به نظریهٔ شکستن اعدادبه تحلیل دیوفانتی مربوط می‌شود، مثل نتیجهٔ مشهوری که **ای . م . وینوگرادوف** بدست آورد که بـر طبق آن معادلهٔ $x+y+z=N$ ، که در آن N عدد فرد مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ است ، برای عددهای اول x،y وz دارای جواب است .

به‌عقیدهٔ **پ . ل . چبیشف** نظریهٔ اعداد «عددها را فقط ازلحاظ قابلیت آنها در مورد صادق بودن در این و یا آن معادلهٔ سیال مطالعه می‌کند » . بهمین مناسبت است‌که‌چبیشف قبول می‌کندکه « نظریهٔ اعداد ، ویا نام دیگر آن حساب متعالی علمی است‌که معادلات سیال را برای‌عددهای صحیح‌حل می‌کند » .

شروع مطالعهٔ منظم دربارهٔ معادلات سیال ، از **دیوفانت** ریاضی‌دان یونانی شروع می‌شود که‌ظاهراً در قرن سوم‌می‌زیسته است . دیوفانت توانست جوابهای مثبت وگویای بعضی انواع معادلات سیال (تا حداکثردرجه چهارم) را پیداکند . روشهای دیوفانت ، بطورکلی ، برای جستجوی جوابهای‌صحیح بیفایده است . بسیاری از محققین روی حالتهای استثنائی و نمونه‌های خاصی که مورد استفادهٔ دیوفانت بوده است تکیه می‌کنند و متذکر می‌شوندکـه او نتوانسته است راه‌حلها و روشهای‌کلی پیداکند . عده‌ای هم عکس این عقیده را دارند ، که از آن جمله می‌توان جمله‌ای از **ای . گ . با شماکرو** نقل

کرد : «کتابهای دیوفانت مجموعهٔ ساده‌ای ازمسائل نیست ، بلکه‌مبتنی برطرح منظم و عمیق بردسیهای نظری است» .

کتاب «حساب» دیوفانت برای‌تکامل نظریهٔ اعداد اهمیت‌فوق‌العاده‌ای دارد . تاثیر این کتاب بخصوص در قرن هفدهم معلوم شد ، وقتی که ترجمهٔ لاتینی آن (از متن‌یونانی) با شرح و تفسیر **باشه‌دو مه‌زیریاك** در سال ۱۶۲۱ درپاریس‌چاپ‌شد[1]. برحواشی‌نسخه‌ای‌ازهمین ترجمه است‌که **فرما** یادداشتهای معروف خود را برای ما باقی گذاشته است . ظاهراً در همین دوره است که نامهای «دیوفانتی ، سیال ، تحلیلی» پیدا شد و حل معادلات سیال برای عددهای صحیح ، به‌عنوان معمول‌ترین مسائل دیوفانتی مطرح شد[2] .

بعد از دیوفانت ، بیش ازهمه فرماروی معادله‌های سیال‌کارکرد . فرما یك رشته مسائل‌مهم دیوفانتی رامطرح‌کرد و بعضی از روشهای‌آنها را مورد بررسی قرارداد . کارهای فرما مایهٔ مطالعات **اولر** ، **لاگرانژ** ، **لژاندر** ، **گوس** ، **کوشی** ، **کومر** و بسیاری از ریاضی‌دانهای دیگر قرارگرفت . این بررسیها به‌پیدایش وتکامل‌نظریهٔ عددهای جبری(که‌یکی از مهمترین‌رشته‌های نظریهٔ نوین اعداد است) کمك کرد . عددهای جبری هم بنوبهٔ خود مسائل دیوفانتی را توسعه داد و بخصوص مسائل‌مربوط به‌حل معادله‌های سیال برای عددهای جبری صحیح در یك هیئت عددی مفروض ، بوجودآمد .

درهیچیك‌از رشته‌های ریاضی‌به‌اندازهٔ تحلیل دیوفانتی، نارسائی‌روشها محسوس‌نیست. بهترین موقعیت‌دراین‌موردمربوط به‌پیداکردن‌جوابهای‌صحیح معادلات جبری دومجهولی با ضرایب صحیح است . نظریهٔ‌معادلات‌درجه‌اول

---

۱) ترجمهٔ لاتینی **باشه‌دومین** ترجمه بود. اولین ترجمهٔ«حساب» دیوفانت درسال۱۵۷۵ چاپ شد، این‌ترجمهٔ را**گولتسمان**پروفسور زبان‌یونانی‌درهیدلبرگ انجام داده بود . اولین ترجمه‌های عربی دیوفانت را **ابن‌لوقا** (وفات در سال ۹۱۲ میلادی) در بغداد و سپس **ابوالوفا** (۹۴۰–۹۹۸) انجام دادند .

۲) قبلا هم معادلات متفرقی‌برای عددهای صحیح بوسیلهٔ ریاضی‌دانهای‌قدیم حل شده بود : در قرن سوم بوسیلهٔ چینیها ، در قرنهای پنجم . هفتم و دوازدهم بوسیلهٔ هندیها ، در قرنهای نهم و یازدهم بوسیلهٔ ریاضی‌دانهای کشورهای اسلامی و در قرن سیزدهم در اروپا بوسیله لئوناردوپیزانسکی .

$ax+by=c$ در ابتدای قرن هفدهم بوسیلهٔ **باشه دومه زیریاك** تکمیل شد. نظریهٔ کامل معادلات درجه دوم $ax^۲+bxy+cy^۲+dx+ey+f=۰$ با کوشش دسته جمعی **فرما**، **برونکر**، **والیس**، **اولر** و **لاگرانژ** بوجود آمد و در اوایل قرن نوزدهم بوسیلهٔ **گوس** جمع بندی شد. در قرن بیستم ریاضی‌دانهای شوروی به بعضی نتایج مهم رسیدند. مثلا ب **ن. دلون** حل کامل معادلهٔ سیال $ax^۳+y^۳=۱$ را پیدا کرد (a عددی طبیعی و غیر مکعب کامل، x و y عددهائی صحیح). او همچنین روش پیدا کردن جوابهای صحیح گروه بزرگی از معادلات به صورت $ax^۳+bx^۲y+cxy^۲+dy^۳=۰$ را به نتیجه رساند. **و. آ. تارتاکوسکی** روش حل همهٔ معادله‌های به صورت $x^{۲n}-۹y^{۲n}=۱$ را، به استثنای معادلهٔ $x^۴-۱۵y^۴=۱$. مشخص کرد. **د. ك فاده‌یف** راه حل یك دسته از معادله‌های درجه چهارم را پیدا کرد که در بین آنها معادلهٔ $x^۴-۱۵y^۴=۱$ هم وجود دارد. **آ. توئه** ریاضی دادن نروژی، در ابتدای قرن بیستم، قضیهٔ کلی زیر را بدست آورد:

اگر $f(z)=a_۰z^n+a_۱z^{n-۱}+\cdots+a_n$ کثیرالجملهٔ با ضرایب صحیح و از درجهٔ $n\geqslant ۳$، برای عددهای گویا جواب نداشته باشد، در اینصورت به ازای هر مقدار صحیح b، معادلهٔ

$$a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}y+\cdots+a_ny^n=b$$

نمی‌تواند بی‌نهایت جواب برای عددهای صحیح x و y داشته باشد.

اثبات این قضیه ابتدا به کمك نظریهٔ تقریب عددهای جبری بوسیلهٔ عددهای گویا، بدست آمد. این نظریه هم در اثر کوششهای **لیوویل**، **توئه**، **ك. زیگل**، **د. د. مرده‌خای بالتووسکی**، **ر. کوزمین**، **آ. گلفوند**، **د. دایسون**، **ك. روت**، **آ. بیکر** و سایر ریاضی‌دانها بوجود آمد و تکامل پیدا کرد. برای مطالعهٔ معادلات جبری با سه یا بیشتر مجهول، اشکالاف زیادی وجود دارد، اگر چه در این زمینه هم کوششهای عده‌ای از ریاضی‌دانها (مثل **د. ك. فاده‌یف**، **ت. ناگل** و دیگران) منجر به نتایج با ارزشی شده است.

در خاتمهٔ این بررسی کوتاه، از مسئلهٔ دهم مشهور **هیلبرت** نام می‌بریم که در آن سئوال مربوط به پیدا کردن آلگوریتمی طرح شده است، بطوریکه بتوانیم در مورد هر معادلهٔ دیوفانتی روشن کنیم که آیا جواب صحیح دارد یا

نه. نتایج سالهای اخیر ما را به‌این سمت هدایت می‌کندکه چنین آلگوریتمی وجود ندارد ؛ عدم وجود یك رشته مسائل آلگوریتمی نزدیك به این مسئله اخیراً بوسیلهٔ م.دیویس ، ه . پوتنام و ج . روبینسون ریاضی‌دانهای امریکائی ثابت شده است .

۱۰ (صفحهٔ ۱۸۲) . اثبات موردل مقدماتی نیست . اوازنظریهٔ جبری اعداد استفاده می‌کند و بررسی خود را بـه معادله‌ای بصورت زیر مربـوط می‌کند (a ، b ، c ، d و e عددهائی صحیح‌اند) .

$$ey^2=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (1)$$

موردل معادلهٔ

$$y(y+1)=x(x+1)(x+2) \qquad (2)$$

را، باضرب طرفین آن در۸ وسپس فرض $u=2y+1$ و $v=2x+2$ ، به معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند :

$$2u^2=v^3-4v+2 \qquad (3)$$

و معادلهٔ (۳) را در حوزهٔ درجه سوم $R(\theta)$ مطالعه می‌کند (θ ریشهٔ‌معادلهٔ $\theta^3-4\theta+2=0$ است). در حوزهٔ $R(\theta)$، می‌توان معادلهٔ(۳) را بصورت زیر نوشت :

$$2u^2=(v-\theta)(v^2+\theta v+\theta^2-4) \qquad (4)$$

سپس موردل روی‌معادلهٔ (۴) ، باتوجه‌به خواص حسابی حوزهٔ$R(\theta)$، کار می‌کند . این خواص چنین‌اند : ۱) عددهای صحیح این حوزه بصورت $a+b\theta+c\theta^2$ هستندکه‌درآن a و b و c اعدادی صحیح‌اند ؛ ۲) واحدها یعنی‌مقسوم‌علیه‌های عدد ۱ در این حوزه عبارتند از عددهای $\pm\varepsilon\eta^m$ ، که درآن $\varepsilon=\theta-1$ ، $\eta=2\theta-1$ و m هرمقدار صحیح دلخواهند، ۳) در حوزهٔ $R(\theta)$قضیهٔ یگانه بودن تجزیه به عوامل‌اول بقوت خود باقی‌است. موردل ثابت می‌کندکه جوابهای‌صحیح معادلهٔ (۳) فقط $v=0,\pm2,4,12$ است. بعد ثابت می‌کندکه‌معادله(۲) برای عددهای‌طبیعی‌تنها دوجواب‌دارد : $x=1$ ، $y=2$ و $x=5$ ، $y=14$ ، یعنی عددهای $1\cdot2\cdot3=2\cdot3=6$

و ۵.۶.۷ = ۱۴.۱۵ = ۲۱۰ تنها عددهای طبیعی هستند که هم مساوی حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی و هم مساوی حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی می‌توانند باشند.

نتیجه جالبی را هم که **گ . ن . واتسون** بدست آورده است، متذکر می‌شویم . واتسون ثابت کرد که معادلهٔ $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}=y^2$ تنها دو جواب برای عددهای طبیعی دارد : $x=1$ و $x=24$ ، یعنی تنها دو عدد هرمی وجود دارد که مجذور یك عدد طبیعی هستند .

۱۱ (صفحهٔ ۲۱۱) . شرط $0<w<1-\frac{\pi^2}{6}$ برای تبدیل زیر لازم نیست :

$$w=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2} \qquad (1)$$

که در آن w عددی گویا و $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ عددهای طبیعی مختلف است و n بسته به عدد w بدست می‌آید .

براساس حکم **اردیوش** ، **سرپینسکی** این قضیهٔ **شینتسل** را ثابت کرد: برای اینکه عدد گویای w بتواند بصورت (۱) تبدیل شود ، لازم است که یکی از شرایط $0\leqslant w<1-\frac{1}{6}\pi^2$ و یا $\frac{1}{6}\pi^2\leqslant w<1$ برقرار باشد .

۱۲ (صفحهٔ ۲۱۲) . در مقاله‌ای از **ل.م . گراهام**، علاوه بر تبدیل عدد $\frac{1}{2}$ ، تبدیل عددهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{37}$ هم داده شده است :

$$\frac{1}{3}=2^{-2}+4^{-2}+10^{-2}+12^{-2}+20^{-2}+30^{-2}+60^{-2},$$

$$\frac{5}{37}=2^{-3}+5^{-3}+10^{-3}+15^{-3}+16^{-3}+74^{-3}+111^{-3}+$$
$$+185^{-3}+240^{-3}+296^{-3}+444^{-3}+1840^{-3}$$

۱۳ (صفحهٔ ۲۲۱) . در اینجا مؤلف از یك مسئلهٔ بسیار جالب دیوفانتی عبور می‌کند . اولر یك رشته احکامی که برای فرضیهٔ زیر لازم است منظم کرده است : به‌ازای عددهای طبیعی k و n که در شرط $2\leqslant k<n$ صدق می‌کنند

معادلهٔ $x_1^n+x_2^n+\dots+x_k^n=x_{k+1}^n$ برای عددهای طبیعی x جواب ندارد از آنجا به‌ازای $k=3$ و $n=4$ به حکم غیر قابل حل بودن معادلهٔ $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$ ، برای عددهای طبیعی ، می‌رسیم . به‌ازای $k=2$ فرضیهٔ اولر به «قضیهٔ بزرگ فرما» تبدیل می‌شود . حالت خاص اخیر از فرضیهٔ اولر نشان می‌دهدکه این مسئله تاچه اندازه مشکل است . اگرفرضیهٔ اولر صحیح و قابل اثبات باشد، طبعاً باید انتظارداشت که قبل از آن اثبات حالت خاص فرضیه پیدا شود .

در سال ۱۹۱۴ آ . **وربروسوف** اثبات حکم اولر را دربارهٔ معادلهٔ غیرقابل حل $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$ طرح می‌کند . **دیکسون** [۱] درکتاب خود از این کاروربروسوف نام می‌برد . ولی متذکر نمی‌شودکه اثبات وربروسوف غلط است . فقط در سال ۱۹۳۵ ، **پادهی** به‌این اشتباه توجه می‌کند[۲]. این اشتباه وربروسوف را **بل** هم تکرار کرده است[۳] . **وارد**[۴] صحت حکم خاص اولر را تا $x_4<10000$ ثابت کرده است[۵] .

۱۴ (صفحهٔ ۲۳۶) . بتازگی ثابت شده است که در دنبالهٔ فیبوناچی فقط عددهای u_1, u_2, u_{12} مجذور کامل‌اند.[۶]

---

۱) L E Dickson History of tho theoty of numbers T.2.1920 (صفحهٔ ۶۴۸)

۲) W.Padhy the mathematics student,T.3.N22,1935 (صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۳) E.Bell The mathematics studer.t,T 4.N21,1936 (صفحه ۷۸)

۴) M ward Proc Nat.Acad. Sc.31,1645 (صفحه۱۲۵)

۵) بنابه گفته **لهمر** (D.H.Lehmer) (از نامه‌ای که در ۱۳ ژوئیه ۱۹۶۶ به‌شینتسل نوشته‌است) **لئون‌لاندر** (L.Lander) در۲۷ژوئن۱۹۶۶ رابطهٔ $۲۷^5+۸۴^5+۱۱۰^5+۱۳۳^5=۱۴۴^5$ را پیدا کردکه‌فرضیهٔ‌اولررادرحالت $k=4$ و $n=5$ ردمی‌کند .

۶) O.Wyler Squares in the Fibonacci series, American Math. Monthly, 71,1964, (صفحه‌های ۲۲۰-۲۲۲)

۱۵ (صفحهٔ ۲۶۱) . روشن است حلی‌که‌در اینجا داده شده است، برای خواننده‌ای مفهوم است که با معادلهٔ زیر آشنا باشد :

$$۲y^۴ - ۱ = z^۲ \qquad (۱)$$

این معادله تاریخچهٔ جالبی دارد . **اولر** در نامه‌ای که در تاریخ دوم سپتامبر ۱۷۴۷ به **گولدباخ** نوشته است ، متذکرمی‌شود که معادلهٔ (۱) برای عددهای‌گویای y و z جواب دارد و این جوابها ، وقتی که y مساوی یکی از عددهـای ۱ ، ۱۳ ، $\frac{۱۵۲۵}{۱۳۴۳}$ و $\frac{۲۱۶۵۰۱۷}{۲۳۷۲۱۵۹}$ باشد، بدست می‌آید ضمناً یادآوری می‌کندکه برای عددهای طبیعیy وz بجزدوجواب $y=z=۱$ و $y=۱۳$ ، $z=۲۳۹$ جواب‌دیگری پیدا نمی‌شود . بعدها اولردوشی راپیدا کرد که به‌کمك آن می‌شد مجموعهٔ نامحدودی از جوابهای معادلهٔ (۱) را بدست آورد، ولی ثابت نکردکه‌این روش همهٔاینگونه جوابها رامعین‌می‌کند[۱] معادلهٔ (۱) **لاگرانژ** را هم بخود مشغول داشت . او یك رابطهٔ برگشتی پیدا کردکه به‌کمك آن‌می‌توان‌همهٔ جوابهای‌گویای این معادله را بدست آورد.[۲] معادلهٔ (۱) علاقهٔ بسیاری از محققین دیگر راهم بخود جلب‌کرد. حل مسئلهٔ مربوط به جوابهای طبیعی‌معادلهٔ (۱) تا زمان **لونگرن** باقی ماند و بالاخره او ثابت کرد که این معادله تنها دو جواب طبیعی دارد که قبلاً اولـر پیدا کرده بود[۳]. معادلهٔ (۱) نقش بزرگی‌درتحقیقات مربوط به نظریهٔ اعداد بازی کرده است .

---

۱) L Euler.Opera omnia,T.5,(صفحه‌های۸۲ـ۹۳)

۲) این رابطه را می‌توان درکتاب سرپنیسکی بنام «حل معادلات برای جوابهای صحیح » پیداکرد .

۳) W.Ljunggren.zur Theorie der Gleichung $x^۲+۱=Dy^۴$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo (Mat-hat.klasse).1,1942, N25, (صفحه‌های ۱ـ۲۷)

اثبات پوستولات برتران (قضیهٔ چبیشف)

(ازسرپینسکی)

اگر x عددی حقیقی باشد ، علامت $[x]$[1] یعنی بزرگترین عدد صحیح $\leqslant x$. بنابراین مثلا داریم :

$$[\pi]=3 \ , \ [\sqrt{2}]=1 \ , \ [-\tfrac{3}{4}]=-1 \ , \ [\tfrac{3}{4}]=0$$

ازاین تعریف نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی نامساویهای $x-1<[x]\leqslant x$ برقرار است ، تساوی $[x]=x$ تنها وقتی برقرار است که x عددی صحیح باشد ، به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم : $[x+k]=[x]+k$. وقتی x و y

---

۱) علامت $[x]$ چنین خوانده می‌شود : «قسمت صحیح x».

دو عدد حقیقی باشند داریم : $[x]+[y]\leqslant[x+y]$. مثلا

$$[\frac{۱}{۳}]+[\frac{۱}{۲}]=[\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}]=۰ \quad ; \quad [\frac{۱}{۲}]+[\frac{۲}{۳}]<[\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}]=۱=۰$$

قضیهٔ ۱ . اگر n عددی طبیعی باشد، در تجزیهٔ عدد $n!$ به عوامل اول ، عدد اول p بصورت توانی با نمای α خواهد بود ، بطوریکه

$$\alpha=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^۲}]+[\frac{n}{p^۳}]+\cdots \qquad (۱)$$

اثبات . n و k را دوعدد طبیعی مفروض و $p\leqslant n$ را عددی اول فرض می‌کنیم . عددهای دنبالهٔ $۱،۲،\ldots،n$ که بر p^k قابل قسمت‌اند، باید بصورت lp^k باشند ،که در آن l عددی است طبیعی ودر شرط $lp^k\leqslant n$ صدق می‌کند، بنحوی‌که $l\leqslant\frac{n}{p^k}$. تعداد مقادیر l مساوی $[\frac{n}{p^k}]$ است . از طرف دیگر روشن است که α (یعنی نمای توان p^α) که در تجزیهٔ $n!$ به عوامل اول ظاهر می‌شود عبارتست از مجموع عددهائی‌که از تعداد جمله‌های دنبالهٔ $۱،۲،\ldots،n$ که بر p یا $p^۲$ یا $p^۳$ وغیره قابل قسمت‌اند ، بدست می‌آید . ازاینجا رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود .

به عنوان مثال ساده‌ای از قضیهٔ ۱ ، این سئوال را مطرح می‌کنیم که عدد $۱۰۰!$ به‌چند صفر ختم شده است .

طبق رابطه‌ای‌که ثابت کردیم نمائی که برای عدد ۲ در تجزیهٔ $۱۰۰!$ بدست می‌آید عبارتست از :

$$[\frac{۱۰۰}{۲}]+[\frac{۱۰۰}{۲^۲}]+[\frac{۱۰۰}{۲^۳}]+\cdots=$$

$$=۵۰+۲۵+۱۲+۶+۳+۱=۹۷$$

و نمائی که برای عدد ۵ بدست می‌آید :

$$[\frac{۱۰۰}{۵}]+[\frac{۱۰۰}{۵^۲}]=۲۰+۴=۲۴$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که اگرعدد $۱۰۰!$ را در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ۱۰ بنویسیم به ۲۴ صفر ختم می‌شود .

لم ۱. برای عدد طبیعی $n>1$ داریم[1]:

$$\binom{2n}{n}>\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \qquad (2)$$

اثبات. نامساوی (۲) به‌ازای $n=2$ صحیح است ، زیرا داریم :

$\binom{4}{2}=6>\frac{4^2}{2\sqrt{2}}$. فرض می‌کنیم‌که نامساوی (۲) برای عدد طبیعی n صحیح باشد . دراینصورت داریم :

$$\binom{2n+2}{n+1}=2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}>\frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\cdot\sqrt{n+1}}>\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

زیرا $(2n+1)^2>4n(n+1)$ و از آنجا $2n+1>\sqrt{4n(n+1)}$ به‌این ترتیب اثبات صحت نامساوی (۲) برای عددهای طبیعی $n>1$ به‌کمك استقراء ریاضی ، بدست آمد .

لم ۲. حاصلضرب P_n همهٔ عددهای اول $n\leqslant$ (n عددی است طبیعی) کوچکتر است از 4^n .

اثبات. روشن است این لم برای $n=1$ و $n=2$ صحیح‌است. بنابراین عدد طبیعی n را بزرگتر از ۲ می‌گیریم . فرض می‌کنیم‌که لم برای عددهای طبیعی کوچکتر از n صحیح باشد . اگر n عددی زوج باشد داریم : $P_n=P_{n-1}$ ، یعنی لم برای عدد n هم صحیح است . اگر $n=2k+1$ باشد (kعددی‌است‌طبیعی)، هرعدداول pکه درشرط $k+2\leqslant p\leqslant 2k+1$ صدق‌کند ، مقسوم‌علیهی از عدد زیر است :

$$\binom{2k+1}{k}=\frac{(2k+1)2k(2k-1)\cdots(k+2)}{1\cdot 2\cdots k} \qquad (3)$$

---

۱) برای علامت $\binom{n}{k}$ به پاورقی صفحهٔ ۷۵ مراجعه‌کنید .

با در نظرگرفتن اینکه

$$(۱+۱)^{۲k+۱} > \binom{۲k+۱}{k} + \binom{۲k+۱}{k+۱} = ۲\binom{۲k+۱}{k}$$

داریم :

$$\binom{۲k+۱}{k} < ۴^k$$

حاصلضرب همهٔ عددهای اول (ومختلف) p ، بنحوی که $k+۲ \leqslant p \leqslant ۲k+۱$ باشد ، مقسوم‌علیهی از عدد $\binom{۲k+۱}{k}$ و بنابراین از ۴^k کوچکتر است. فرض کرده بودیم که برای هر عدد طبیعی کوچکتر از n ، حاصلضرب عددهای اول $\leqslant k+۱$ کوچکتر از $۴^{k+۱}$ باشند . بنابراین

$$P_n = P_{۲k+۱} < ۴^k . ۴^{k+۱} = ۴^{۲k+۱} = ۴^n$$

از آنجا $P_n < ۴^n$. به این ترتیب به‌کمك استقراءریاضی صحت لم را برای هر عدد طبیعی n ثابت کردیم .

لم ۳ . اگر p مقسوم‌علیه اولی از عدد $\binom{۲n}{n}$ و ضمناً $k \geqslant \sqrt{۲n}$ باشد ، در تجزیهٔ عدد $\binom{۲n}{n}$ به عوامل اول ، عدد p بصورت توانی با نمای واحد ظاهر خواهد شد .

اثبات . طبق قضیهٔ ۱ نمای عدد p، در تجزیهٔ عدد $(۲n)!$ به‌عوامل اول، برابر است با :

$$\left[\frac{۲n}{p}\right] + \left[\frac{۲n}{p^۲}\right] + \left[\frac{۲n}{p^۳}\right] + \cdots$$

و نمای عدد p در تجزیهٔ عدد $n!$:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \left[\frac{n}{p^۳}\right] + \cdots$$

و چون داریم : $\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n!)}{(n!)^۲}$ ، در تجزیهٔ عدد $\binom{۲n}{n}$ به عوامل اول عدد p بصورت توانی با نمای α ظاهر می‌شود ، بنحوی‌که داریم :

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

اگر $p\geqslant\sqrt{2n}$ باشد ، $p=\sqrt{2n}$ تنها وقتی است که $n=2$ شود.

بنابراین برای $n\neq 2$ داریم: $p>\sqrt{2n}$، از آنجا $\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]<2$ و $\alpha=0$.

بنابراین $\alpha<2$ و چون α عددی است صحیح $\alpha\leqslant 1$. به این ترتیب برای $n\neq 2$ لم ثابت شد و برای $n=2$ هم صحت آن بسادگی و بطور مستقیم بدست می‌آید ، زیرا $\binom{4}{2}=6<2^3$.

لم ۴ . هر یك از مقسوم‌علیه‌های عدد $\binom{2n}{n}$ که بصورت p^r باشد (p عددی است اول و r عددی طبیعی) ، از $2n$ بزرگتر نیست و ضمناً[1] :

$$\binom{2n}{n}<(2n)^{\pi(2n)}$$

اثبات . اگر $\binom{2n}{n}$ بر p^r قابل قسمت باشد، دراینصورت ضمن تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به‌عوامل اول ، عدد p بصورت توانی با نمای α است ، بنحوی که داریم :

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)\geqslant r$$

اگر $p^r>2n$ باشد ، برای $k\geqslant r$ داریم : $\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$ و بنابراین :

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

ولی چون برای هر عددحقیقی x نامساوی $[2x]-2[x]\leqslant 1$ برقراراست،

---

۱) علامت $\pi(x)$ یعنی تعداد همه عددهای اول $\leqslant x$.

از تساوی اخیر بدست می‌آید : $\alpha \leqslant r-1$ ؛ که برخلاف $\alpha \geqslant r$ است بنابراین $p^r \leqslant 2n$. برای اثبات قسمت دوم لم توجه می‌کنیم که در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به‌عوامل اول، فقط عددهای اول $\leqslant 2n$ واردمی‌شود. از آنجا $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$

لم ۵. اگر n عددی طبیعی بزرگتر از ۲ باشد ، هیچ عدد اولی که در شرط $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ صدق کند ، نمی‌تواند مقسوم‌علیه عدد $\binom{2n}{n}$ باشد .

اثبات . اگر $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ باشد ، داریم : $\frac{2n}{p} < 3$ و $\frac{n}{p} \geqslant 1$.

بنابراین $\left[\frac{n}{p}\right] \geqslant 1$ و $\left[\frac{2n}{p}\right] \leqslant 2$ که نتیجه می‌دهد $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ [1]

برای $k > 1$ داریم : $p^k > \frac{4}{9}n^2$ وبنابراین $\frac{2n}{p^k} < \frac{9}{2n} < 1$ برای $n > 4$.

به‌این ترتیب برای $k > 1$ و $n > 4$ داریم: $\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$.

بنابراین به‌ازای $n > 4$ در تجزیهٔ $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول عدد p با نمای ۰ است ، یعنی عدد $\binom{2n}{n}$ بر p قابل‌قسمت نیست. به‌این ترتیب برای $n > 4$ صحت لم ثابت شد . در حالتهای $n = 3$ و $n = 4$ صحت لم را با آزمایش تحقیق می‌کنیم. درهردوحالت عداول p ، که بایددر شرط $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ صدق کند ، برابراست با ۳. عدد ۳ هم مقسوم علیه عدد $\binom{6}{3} = 20$ یا $\binom{8}{4} = 70$ نیست .

---

۱) این تساوی ازاینجا نتیجه میشود که

$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \leqslant 2 - 2.1 = 0$ ، یعنی $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \leqslant 0$ ، از طرف دیگر برای هر عدد حقیقی x ، نامساوی $[2x] - 2[x] \geqslant 0$ صحیح است .

لم ۶ . عدد اول p ، که‌درشرط $n<p<2n$ صدق کند ، در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول ، بصورت توانی با نمای واحد خواهد بود .

اثبات . برای $n<p<2n$ داریم: $1<\frac{2n}{p}<2$ و $\frac{n}{p}<1$.

بنابراین $\left[\frac{2n}{p}\right]=1$ و $\left[\frac{n}{p}\right]=0$. برای $k\geqslant 2$داریم: $\frac{2n}{p^k}\leqslant\frac{2n}{p^2}<\frac{2}{n}$.

بنابراین برای $n>1$ ، $\frac{2n}{p^k}<1$ می‌شود ، بنحوی که $\left[\frac{2n}{p^k}\right]=0$و شبیه آن $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$. به‌این ترتیب نمای α از عدد p در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول برابر است با ۱ ، حالت $n=1$ احتیاجی به اثبات ندارد ، زیرا در اینحالت هیچ عدد اول p در شرط $n<p<2n$ صدق نمی‌کند .

لم ۷ . برای عددهای طبیعی $n\geqslant 14$ نامساوی زیر برقرار است :

$$\pi(n)\leqslant\frac{1}{2}n-1$$

اثبات . بسادگی می‌توان محاسبه کرد : $\pi(14)=6=\frac{14}{2}-1$.

بنابراین لم ۷ برای $n=14$ صحیح است . فرض می‌کنیم n عددی طبیعی و $n\geqslant 15$ باشد . در دنبالهٔ $1,2,\ldots,n$ ، عددهای زوج $2,4,6,8,\ldots,2\left[\frac{n}{2}\right]$ مرکب‌اند و تعداد آنها مساوی $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ است . علاوه بر آن در دنبالهٔ $1,2,\ldots,n$ به‌ازای $n\geqslant 15$ ، عددهای فرد ۱ ، ۹ و ۱۵ هم اول نیستند. بنابراین داریم :

$$\pi(n)\leqslant n-\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1+3\right)=n-\left[\frac{n}{2}\right]-2<\frac{n}{2}-1$$

زیرا $\left[\frac{n}{2}\right]>\frac{n}{2}-1$. به‌این ترتیب‌برای $n\geqslant 15$داریم $\pi(n)<\frac{n}{2}-1$ و لم بطورکامل ثابت شد .

لم ۸ . R_n را مساوی حاصلضرب همهٔ عددهای اول p می‌گیریم که

در شرط $n<p\leqslant 2n$ صدق‌کنند و در حالتی که چنین عددهای اولی وجود نداشته باشد $R_n=1$ می‌گیریم . در اینصورت به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی $n\geqslant 98$ داریم :

$$R_n>\frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}} \qquad (4)$$

اثبات . از تعریف R_n بلافاصله نتیجه می‌شود که $\binom{2n}{n}$ بر R_n قابل قسمت است . بنابراین $\binom{2n}{n}=Q_nR_n$ ، که در آن Q_n عددی‌است‌طبیعی. از اینجا با توجه به لم ۶ نتیجه می‌گیریم که حتی یك عدد اول p ، که در شرط $n<p\leqslant 2n$ صدق‌کند ، در تجزیهٔ عدد Q_n به‌عوامل اول وجودندارد به‌این ترتیب عددهای اول p که در این‌تجزیه وجوددارند باید $p\leqslant n$ باشند. اما دراینصورت بنابر لم ۵ باید $n\leqslant\frac{2}{3}n$ باشند. بنابراین‌حاصلضرب همهٔ‌عددهای اول و مختلف p، بنحوی‌که Q_n بر p قابل قسمت باشد : از حاصلضرب همهٔ عددهای اول $n\leqslant\frac{2}{3}n$ تجاوز نمی‌کندو بنابراین‌طبق‌لم۲ : $4^{\frac{2n}{3}}\leqslant 4^{\left[\frac{2n}{3}\right]}<$ می‌شود . براساس لم ۳ و با توجه به‌اینکه $\binom{2n}{n}$ بر Q_n قابل قسمت است . نتیجه می‌گیریم که نمای عدد اول p در تجزیهٔ Q_n به‌عوامل اول فقط وقتی بزرگتر از واحد است‌که $p<\sqrt{2n}$ باشد. تعداد اینگونه عددها طبق لم ۷ (با تبدیل n به $[\sqrt{2n}]$ در آن ، و این تبدیل هم ممکن است زیرا با شرط $n\geqslant 98$ داریم $\sqrt{2n}\geqslant 14$ و از آنجا $14\leqslant[\sqrt{2n}]$) کمتر از $\frac{\sqrt{2n}}{2}$ است .

طبق لم ۴ حاصلضرب توانهای اولی که در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول بدست می‌آید ، یعنی حاصلضرب توانهای عددهای اولی که در

تجزیهٔ Q_n به عوامل اول بدست می‌آید کمتر از $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$ است از آنجا نتیجه می‌شود $Q_n < 4^{\frac{2n}{3}}(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$. ولی چون $Q_n R_n = \binom{2n}{n}$ و طبق لم ۱ ،

$Q_n R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ است ، بسادگی نامساوی(۴) بدست می‌آید .

لم ۹ . برای عددهای طبیعی $k \geqslant 8$ داریم : $2^k > 18(k+1)$.

اثبات . داریم : $2^8 = 256 > 18.9$ واگر $2^k > 18(k+1)$ باشد، بدست می‌آید :

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > 18k + 18 + 18k + 18 > 18k + 36 = 18(k+2)$$

به‌این ترتیب لم ۹ به‌کمك استقراء ریاضی ثابت شد .

لم۱۰ . برای عددهای حقیقی $x \geqslant 8$ داریم . $2^x > 18x$.

اثبات . برای عددهای حقیقی $x \geqslant 8$ داریم : $[x] \geqslant 8$. بنابراین طبق لم ۹: $2^{[x]} > 18([x]+1) > 18x$. و از آنجا $2^x \geqslant 2^{[x]} > 18x$.

لم۱۱ . برای هر عدد طبیعی $k \geqslant 6$ داریم : $2^k > 6(k+1)$.

اثبات . با توجه‌به لم ۹ ،کافی است لم ۱۱ را برای $k = 6$ و $k = 7$ ثابت‌کنیم . ولی داریم :

$$2^6 = 64 > 60.7 \quad ; \quad 2^7 = 128 > 60.8$$

لم۱۲ . برای عددهای حقیقی $x \geqslant 6$ داریم . $2^x > 6x$.

اثبات . شبیه اثبات لم ۱۰ می‌باشد .

لم۱۳ . اگر $n \geqslant 648$ عددی طبیعی باشد $R_n > 2n$ است .

اثبات . با توجه به لم ۸ ، کافی است ثابت کنیم که اگر $n \geqslant 648$ باشد داریم : $4^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\frac{\sqrt{n}}{2}}$. توجه می‌کنیم که اگر $n \geqslant 648$ باشد ، $\frac{\sqrt{2n}}{6} > 6$ است و طبق لم ۱۲ نامساوی $2^{\frac{\sqrt{2n}}{6}} > \sqrt{2n}$ برقرار

است ، از آنجا اگر طرفین نامساوی اخیر را به‌توان $\sqrt{2n}$ برسانیم بدست می‌آید : $(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}} > 2^{\frac{n}{3}}$. ولی چون $n \geqslant 648$ ، یعنی $8 > \frac{2n}{9}$ است طبق لم ۱۰ داریم : $4n > 2^{\frac{2n}{9}}$ و از آنجا $4n\sqrt{n} > 4n\sqrt{4n} > 2^{\frac{n}{3}}$. به این ترتیب برای $n \geqslant 648$ داریم : $(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}} > 2^{\frac{n}{3}}$ و $2^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}$. و از آنجا : $(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}} > 4n\sqrt{n} > 4^{\frac{n}{3}}$.

لم ۱۴ . اگر $n \geqslant 648$ باشد ، بین n و $2n$ لااقل دو عدد مختلف اول وجود دارد .

اثبات . از تعریف عدد R_n نتیجه می‌شود که اگر بین n و $2n$ تنها یك عدد اول وجود داشته باشد $R_n \leqslant 2n$ می‌شود که برای $n \geqslant 648$ ممکن نیست ، زیرا مخالف لم ۱۳ است .

قضیهٔ ۲ . اگر $n > 5$ عددی طبیعی باشد ، بین n و $2n$ لااقل دو عدد مختلف اول وجود دارد .

اثبات . به‌ازای $n = 6$ قضیه صحیح است . زیرا بین عددهای ۶ و ۱۲ عددهای اول ۷ و ۱۱ قرار دارد . بنابراین ، با توجه به لم ۱۴ ، کافی است ثابت کنیم که قضیه برای هر عدد طبیعی n صحیح است ، بنحوی که $7 \leqslant n < 648$ باشد . برای اثبات این مطلب لازم نیست صحت قضیه را برای هر یك از عددهای $a = 6, 7, 8, \ldots, 647$ بطور جداگانه آزمایش کنیم . کافی است دنبالهٔ صعودی عددهای اول $q_0, q_1, \ldots, q_m$ را تشکیل دهیم ، بنحوی که $q_0 = 7$ ، $q_k < 2q_{k-2}$ (برای $k = 2, 3, \ldots, m$) و $q_{m-1} > a$ باشد. در حقیقت فرض کنید n عددی طبیعی باشد که در شرط $7 \leqslant n \leqslant a$ صدق کند . اولین جملهٔ دنبالهٔ $q_0, q_1, \ldots, q_m$ از n تجاوز نمی‌کند ، آخرین جملهٔ این دنباله هم $a \geqslant n >$ و بنابراین $n >$ است ، به‌این ترتیب بزرگترین اندیس k کوچکتر از $m - 1$ وجود دارد ، بنحوی که $q_k \leqslant n$ باشد . در

نتیجه داریم : $k+2\leqslant m$ و $n<q_{k+1}$ با در نظر گرفتن رابطهٔ $q_{k+2}<2q_k\leqslant 2n$ معلوم می‌شود که بین n و 2n لااقل دو عدد اول q_{k+1} و q_{k+2} وجود دارد .

به‌کمك جدول عددهای اول بسادگی تحقیق می‌شودکه دنبالهٔموردبحث فوق‌عبارتست‌ازدنبالهٔ عددهای۷ ، ۱۱ ، ۱۳، ۱۹ ، ۲۳، ۳۷ ، ۴۳ ، ۷۳ ، ۸۳ ، ۱۳۹ ، ۱۶۳ ، ۲۷۷ ، ۳۱۷ ، ۵۴۷ ، ۶۳۱ ، ۶۵۳ ، ۱۲۵۹ .

از اثبات قضیهٔ ۲ مستقیماً قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود .

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ چبیشف) . اگر $n>3$ عددی طبیعی باشد ، بین n و $2n-2$ لااقل یك عدد اول وجود دارد .

قضیهٔ برای $n=4$ و $n=5$ صحیح‌است ، زیرا بین ۴ و ۶ عدد اول ۵ و بین ۵ و ۸ عدد اول ۷ قرار گرفته است . اگر $n>5$ باشد ، طبق‌قضیهٔ ۲ ، بین n و $2n$ لااقل۲ عدداول‌وجود دارد . اگر بزرگترین آنها $q=2n-1$ باشد . دیگری باید از $2n-2$ کوچکتر شود ، زیرا به‌ازای $n>5$ ، عدد $2n-2$ مرکب‌است. به‌این‌ترتیب $n<p<2n-2$. اگرهم $q<2n-1$ باشد ، چون $p<q$ است دوباره داریم : $n<p<2n-2$.

قضیهٔ ۳ در سال ۱۸۴۵ بوسیلهٔ **برتران** طرح شد و برای اولین‌بار در سال ۱۸۵۰ بوسیلهٔ **چبیشف** اثبات شد . اثباتی‌که در اینجا ذکرشد از **اولر** است‌که با تغییر اثبات **کالمار** بدست آورد .

نتیجهٔ ۱ . اگر $n>1$ عددی طبیعی باشد ، بین n و 2n لااقل یك عدد اول وجود دارد .

اثبات . طبق قضیهٔ ۳ ، این حکم‌برای عددهای طبیعی $n>3$ صحیح‌است. برای عددهای طبیعی ۲ و ۳ هم صحیح است ، زیرا بین ۲ و ۴ عدد اول۳و بین ۳ و ۶ عدد اول ۵ قرارگرفته است .

نتیجهٔ ۲ . برای عدد طبیعی $k>1$ داریم : $p_k<2^{2^k}$ (p_k یعنی k امین عدد اول به‌ردیف) .

اثبات . داریم $p_2=3<2^{2^2}$. اگر برای عدد طبیعی k نامساوی $p_k<2^{2^k}$ صحیح باشد . طبق نتیجهٔ ۱ لااقل یك عدد اول بین عددهای 2^{2^k}

و p_k وجود داردکه البته از 2^{k+1} بـزرگتر است . بنابـراین نـامساوی $p_{k+1}<2^{k+1}$ هم صحیح می‌شود . به‌این‌ترتیب اثبات حکم به‌کمك‌استقراء ریاضی انجام‌گرفت .

نتیجهٔ ۳ . اگر $n>1$ باشد ، در تجزیهٔ عدد $n!$ به‌عوامل‌اول لااقل یك عامل با نمای واحد وجود دارد .

اثبات . واضح‌است‌که‌حکم‌به‌ازای $n=2k>1$ صحیح‌است. اگر $n=2k$ باشد ($k>1$ عددی طبیعی است) ، بنابر نتیجهٔ ۱ عدد اول p وجود دارد بنحوی‌که $k<p<2k$ باشد و از آنجا $p<n<2p$ ، بنابراین p تنها مقسوم‌علیه یکی از عوامل حاصلضرب $1.2.3\ldots n$ می‌شود . از طرف دیگر اگر $n=2k+1$ باشد (k عددی است طبیعی) ، عدد اول p وجود دارد بنحوی‌که $k<p\leq 2k<n$ باشد، از آنجا $2p>2k$ وبنابراین $2p>2k+1$ می‌شود ، بنحوی که مثل حالت اول داریم : $p<n<2p$ یعنی باز هم حکم لم صحیح است .

از نتیجهٔ ۳ بلافاصله نتیجه می‌شود :

نتیجهٔ ۴ . برای $n>1$ ، عدد $n!$ نمی‌تواند مساوی توانی از یك عدد صحیح با نمای صحیح بزرگتر از واحد باشد .

حالا حکم زیر را از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم :

قضیهٔ ۴ برای عددهای طبیعی $k>3$ داریم : $p_{k+2}<2p_k$

اثبات . k راعددی‌طبیعی‌و $k>3$ می‌گیریم، دراینصورت $p_k>p_3=5$ می‌شود. طبق‌قضیهٔ ۲ بین p_k و $2p_k$ لااقل دو عدد اول مختلف وجود دارد و چون‌کوچکترین‌عددهای اولی‌که‌از p_k بزرگتر باشند عبارتند از p_{k+1} و p_{k+2} باید $p_{k+2}<2p_k$ باشد .

متذکر می‌شویم که برعکس از قضیهٔ ۴ هم می‌توان بلافاصله قضیهٔ ۲را نتیجه‌گرفت . فرض می‌کنیم‌که قضیهٔ ۴ صحیح باشد و n را عددی طبیعی >6 می‌گیریم . به‌این ترتیب $n\geq 7$ یعنی $n\leq 7=p_k\cdot p_4$ را بزرگترین عـدد اولی می‌گیریم که از n بزرگترنباشد ؛ واضح است: $k>3$ و $p_{k+1}>n$

طبق قضیهٔ ۴ داریم : $p_{k+۲} < ۲p_k \leqslant ۲n$. بنابراین بین n و ۲n لااقل دو عدد اول $p_{k+۱}$ و $p_{k+۲}$ وجود دارد. بنابراین تنها امتحان درستی قضیهٔ ۲ به‌ازای $n = ۶$ باقی می‌ماند .

به‌این ترتیب ثابت کردیم که قضیه‌های ۲ و ۴ هم‌ارزند ، به این معنا که از هرکدام می‌توان دیگری را نتیجه گرفت .

نتیجهٔ ۱ . به ازای $k = ۱,۲,...$ داریم : $p_{k+۱} < ۲p_k$.

اثبات . به ازای $k = ۴,۵,...$ این حکم مستقیماً از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود . بنابراین حکم مفروض را برای $k = ۱,۲,۳$ تحقیق می‌کنیم :

$$p_۲ = ۳ < ۴ = ۲p_۱ \quad ; \quad p_۳ = ۵ < ۶ = ۲p_۲ \quad ; \quad p_۴ = ۷ < ۱۰ = ۲p_۳$$

نتیجهٔ ۲ . برای عددهای طبیعی $k > ۱$ داریم : $p_{k+۲} < k_k + p_{k+۱}$

اثبات . وقتی $k > ۳$ باشد، رابطهٔ حکم بلافاصله از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود: $p_{k+۲} < ۲p_k < p_k + p_{k+۱}$ (زیرا $p_k < p_{k+۱}$). ولی حکم به‌ازای $k = ۲$ و $k = ۳$ هم صحیح است زیرا داریم :

$$p_۴ = ۷ < ۳ + ۵ = p_۲ + p_۳ \quad ; \quad p_۵ = ۱۱ < ۵ + ۷ = p_۳ + p_۴$$

قضیهٔ شرك (H.F.Scherk)

ازسرپنیسکی

قضیه . برای هرعدد طبیعی n، با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» داریم :

$$p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \cdots \pm p_{2n-2} + p_{2n-1} \qquad (5)$$

$$p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \cdots \pm p_{2n-1} + 2p_{2n} \qquad (6)$$

این روابطرا **شرك** درسال ۱۸۳۰ پیداکرد. اثبات آنها درسال ۱۹۲۸ بوسیلهٔ پیلائی (S.S.Pillai) منتشرشد. اثباتی که دراینجا آمده است در سال

۱۹۵۲ بوسیلهٔ سرپنیسکی چاپ شد. اثبات مشابهی هم در سال ۱۹۵۵ بوسیله توفل (R.Teuffel) داده شد.

اثبات. گوئیم دنبالهٔ نامحدود $q_1, q_2, \ldots$ دارای خاصیت P است وقتی که صعودی باشد و به استثنای جملهٔ اول بقیهٔ جمله‌ها فرد باشند بنحوی که داشته باشیم (برای $n = 1, 2, \ldots$):

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7, q_5 = 11, q_6 = 13, q_7 = 17 \quad (7)$$

$$q_{n+1} > 2q_n \quad (8)$$

بخصوص توجه می‌کنیم که بنابر نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۴، دنبالهٔ $q_n = p_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) دارای خاصیت P است.

بنابراین برای اثبات قضیهٔ شرک کافی است ثابت کنیم که روابط (۵) و (۶) با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» برای هر دنبالهٔ باخاصیت P صحیح است.

لم. اگر $q_1, q_2, \ldots$ دنبالهٔ نامحدود با خاصیت P باشد. برای $n \geqslant 3$ هر عدد فرد $\leqslant q_{2n+1}$ را می‌توان با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» بصورت زیر نوشت:

$$\pm q_1 \pm q_2 \pm \cdots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$$

اثبات لم. براساس (۷) نتیجه می‌گیریم که لم برای $n = 3$ صحیح است. در حقیقت داریم:

$$1 = -q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 + q_6,$$
$$3 = q_1 - q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$
$$5 = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 + q_6,$$
$$7 = -q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6,$$
$$9 = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$
$$11 = q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6,$$

$$۱۳ = q_۱ - q_۲ + q_۳ + q_۴ - q_۵ + q_۶,$$
$$۱۵ = -q_۱ + q_۲ + q_۳ + q_۴ - q_۵ + q_۶,$$
$$۱۷ = q_۱ + q_۲ - q_۳ - q_۴ + q_۵ + q_۶$$

متذکر می‌شویم که به‌ازای $n = ۲$. حکم لم صحیح نیست ، زیرا با انتخاب ترکیبی ازعلامتهای «+» یا «−» تساوی $۷ \pm ۵ \pm ۳ \pm ۲ = ۵$ ممکن نیست .

حالا فرض می‌کنیم که‌لم برای عددطبیعی $n \geqslant ۳$ صحیح باشد، $۲k-۱$ را عددی فرد $\leqslant q_{۲n+۳}$ می‌گیریم .

بنابر رابطهٔ (۸) داریم : $q_{۲n+۲} < ۲q_{۲n+۱}$ و بنابراین

$$-q_{۲n+۱} \leqslant \pm(۲k-۱-q_{۲n+۲}) - q_{۲n+۱} < q_{۲n+۱}$$

بنابراین می‌توان علامتهای «+» یا «−» را طوری انتخاب‌کرد که داشته باشیم :

$$۰ \leqslant \pm[\pm(۲k-۱-q_{۲n+۲}) - q_{۲n+۱}] \leqslant q_{۲n+۱} \qquad (۹)$$

چون هر یك ازعددهای $q_{۲n+۱}$ و $q_{۲n+۲}$ فرد هستند، عددی که‌درنامساویهای (۹) در وسط قرارگرفته است عدد طبیعی فردی $\leqslant q_{۲n+۱}$ است . بنابراین براساس فرض استقراءکه لم برای عدد n صحیح بود، می‌توانیم‌نتیجه‌بگیریم که با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» تساوی زیر صحیح است :

$$\pm[\pm(۲k-۱-q_{۲n+۲}) - q_{۲n+۱}] = \pm q_۱ \pm q_۲ \pm \cdots \pm q_{۲n-۱} + q_{۲n}$$

از آنجا با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» بدست می‌آید :

$$۲k-۱ = \pm q_۱ \pm q_۲ \pm \cdots \pm q_{۲n} \pm q_{۲n+۱} + q_{۲n+۲}$$

یعنی صحت حکم لم برای عدد $n+۱$ ثابت شد و بنابراین به کمك استقراء ریاضی ثابت کردیم که لم برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۳$ صحیح است .

نتیجه . با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» داریم :

$$q_{2n+1}=\pm q_1\pm q_2\pm\cdots\pm q_{2n-1}+q_{2n} \qquad (10)$$

اثبات نتیجه. چون q_{2n+1} عدد طبیعی فردی است ، رابطهٔ (۱۰) برای $n\geqslant 3$ بلافاصله از لم نتیجه می‌شود . به‌ازای $n=1$ و $n=2$ با در نظرگرفتن (۷) ، مستقیماً بدست می‌آید :

$$q_3=q_1+q_2 \; ; \; q_5=q_1-q_2+q_3+q_4$$

حالا به‌اثبات روابط (۵) و (۶) می‌پردازیم .

اثبات رابطهٔ (۶) . به‌ازای $n\geqslant 3$ ، عدد $q_{2n+1}-q_{2n}-1$ ، با توجه به (۸) عدد فرد طبیعی‌کوچکتر از q_{2n+1} است . بنابراین بـراساس لم ، با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» داریم :

$$q_{2n+1}-q_{2n}-1=\pm q_1\pm q_2\pm\cdots\pm q_{2n-1}+q_{2n}$$

از آنجا (برای $q_i=p_i$ $(i=1,2,\ldots$) رابطهٔ (۶) بدست می‌آید. برای $n=1$ و $n=2$ مستقیماً معلوم می‌شود :

$$q_3=1-q_1+2q_2 ; q_5=1-q_1+q_2-q_3+2q_4$$

بنابراین رابطهٔ (۶) برای هر عدد طبیعی n صحیح است .

اثبات رابطهٔ (۵) . براساس (۷) داریم $q_{2n+2}<2q_{2n+1}$ وتوجه می‌کنیم که $q_{2n+1}-q_{2n+2}-1$ عدد فرد طبیعی وکوچکتر از q_{2n+1} است . حالا با در نظرگرفتن لم ، برای $n\geqslant 3$ و انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «−» داریم :

$$q_{2n+2}-q_{2n+1}-1=\pm q_1\pm q_2\pm\cdots\pm q_{2n-1}+q_{2n}$$

و از آنجا :

$$q_{2n+2}=1\pm q_1\pm q_2\pm\cdots\pm q_{2n-1}+q_{2n}+q_{2n+1} \qquad (11)$$

علاوه برآن با در نظرگرفتن (۷) داریم :

$$q_2=1+q_1 ; q_4=1-q_1+q_2+q_3 ;$$
$$q_6=1+q_1-q_2-q_3+q_4+q_5$$

که رابطهٔ (۱) را برای $n=0$ و $n=1$ و $n=2$ ثابت می‌کند . به این ترتیب رابطهٔ (۱۱) برای $n=0,1,2,\ldots$ صحیح است و بنابراین (چون $p_i=q_i$ ، $i=1,2,\ldots$) رابطهٔ (۵) هم‌برای $n=1,2,3,\ldots$ صحیح‌است.

به‌این ترتیب قضیهٔ شرك ثابت شد .